有限インパルス応答を用いた逆フィルタの求め方について

○名越 裕晃　朝倉 裕貴　澤見 英男
岡山理科大学大学院総合情報研究科情報科学専攻
(e-mail) —sawami@mis.ous.ac.jp—

1　はじめに

焦点がずれるなどの原因による画像の劣化をフーリエ変換係数の高周波成分に対する操作として表すことができる．したがって元の画像を復元するには，劣化した画像のフーリエ係数を操作前の値に戻し，この係数を逆フーリエ変換すれば良い．しかし，フーリエ変換係数に対する操作すなわちフィルタ処理は特定の周波数成分を零にするのが一般的であり，この場合に逆操作アルゴリズムの構成は困難となる．これに対し，このようなフィルタ処理を畳み込み操作で表すと，このような困難が生じないことが分った．ここでは画像のぼけを畳み込み操作，FIR フィルタで表すことにより，これに対する逆操作を IIR フィルタや FIR フィルタにより実現できる事を示す.

2　FIR フィルタについて

長さが N の有限インパルス応答（Finite Impulse Response; FIR）を有するフィルタは，出力 y(n)，入力 x(n) を用いて以下のような畳み込み処理により表すことができる.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k x(n-k) \tag{1}$$

ここで係数 a_k はフィルタのインパルス応答を表している．この式の両辺に z 変換を施すと以下の関係が得られる.

$$\begin{aligned} Y(z) &= Z[y(n)] = Z[\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} a_k x(n-k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k Z[x(n-k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k z^{-k} X(Z) = \mathrm{H}_1(z) X(z) \end{aligned} \tag{2}$$

$\mathrm{H}_1(z)$ はインパルス応答の z 変換であることを注記しておく。一方，再帰型のフィルタは以下のように表すことができ，一般に無限インパルス応答 (Infinite Impulse Response; IIR) を示す.

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{M}-1} b_k y(n-k) = x(n) \tag{3}$$

この式の両辺に z 変換を施すと以下の関係が得られる.

$$(\sum_{k=0}^{\mathrm{M}-1} b_k z^{-k}) Y(z) = X(z) \tag{4}$$

これを書き直すと次のようになる。

$$Y(z) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{M}-1} b_k z^{-k}} X(z) = \mathrm{H}_2(z)X(z) \tag{5}$$

以上の結果より FIR フィルタと IIR フィルタにより入力信号を処理すると，以下の関係が得られることになる。

$$Y(n) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} a_k z^{-k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{M}-1} b_k z^{-k}} X(z) = \mathrm{H}_1(z)\mathrm{H}_2(z)X(z) \tag{6}$$

したがって FIR フィルタで処理した入力信号を IIR フィルタで処理する際，M=N，$a_k = b_k(k = 0, 1 \cdots$, N-1) とすれば，$\mathrm{H}_1(z)\mathrm{H}_2(z) = 1$ となることより入力信号を再現できることがわかる．

3　テンプレートによる FIR フィルタおよび IIR フィルタの表現

入力信号 $x(0), x(1), \cdots$ に式 (1) を順次適用することにより中間出力 $t(0), t(1), \cdots$ が得られるが，この FIR フィルタをテンプレートにより表すことができる．

a_{N-1}	$\cdots$	a_n	$\cdots$	a_2	a_1	a_0		
		$\updownarrow$		$\cdots\cdots\cdots$		$\updownarrow$		
		$x(0)$	$x(1)$	$\cdots$		$x(n)$	$x(n+1)$	$\cdots$

$$t(n) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} a_k x(n-k) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{7}$$

このテンプレートを対応付けて，中間信号 $t(n)$ に関する畳み込み処理を，出力 $y(n)$ に対する逆 FIR フィルタ処理として表すことができる．

$$t(n) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} a_k y(n-k) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

この式は出力 $y(n)$ が，中間信号 $t(n)$ と既に得られた出力 $y(n-1), y(n-2), \cdots$ により計算できることを表している．これにより，元の入力信号 $x(n)$ を $y(n)$ として復元する IIR フィルタ処理を，FIR フィルタと同様にしてテンプレートを用い表すことができる．

	$t(0)$	$\cdots$		$t(n-1)$	$t(n)$	$t(n+1)$	$\cdots$
					$\updownarrow$		
$\cdots$	a_n	$\cdots$	a_2	a_1	a_0		
	$\updownarrow$	$\cdots\cdots\cdots$		$\updownarrow$			
	$y(0)$	$\cdots$		$y(n-1)$	$y(n)$	$y(n+1)$	$\cdots$

$$y(n) = \frac{1}{a_0}(t(n) - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} a_k y(n-k)) \tag{9}$$

したがってこの IIR フィルタは，出力信号 $y(n-k)(k=1,2,\cdots,$ N-1) に対する FIR フィルタ処理と中間信号 $t(n)$ に対する FIR フィルタ処理により表されていることから，それぞれに対して個別のテンプレートにより実現することができる．この中間信号 $(t(n), n=0,1,2,\cdots)$ と IIR フィルタ処理された出力信号 $(y(n), n=0,1,2,\cdots)$ それぞれに対する個別テンプレートは以下のようになる．

0	$\cdots$	0	0	a_0	$\cdots$ t(n) 用

a_{N-1}	$\cdots$	a_2	a_1	0	$\cdots$ y(n) 用

4　1次元信号および2次元信号による実験

1 次元信号および 2 次元信号に関する移動平均を取り上げ，上記の復元手順を示す．移動 3 点平均は 1 次元信号に対する FIR フィルタ処理なので以下のテンプレートにより表すことができる．

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

FIR フィルタにより処理された信号は次のテンプレートにより完全に復元できた．

0	0	$\frac{1}{3}$	$\cdots$ t(n) 用

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\cdots$ y(n) 用

同様に，2 次元信号に対する 9 点移動平均に関するテンプレートは以下のように表すことができる．

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

実験に使用した原画像 (図 1) は縦横 512 ピクセル，24 ビットのモノクロ画像で，25 点移動平均フィルタを使用する．実験は以下のようにして行った．

(1) 原画像 (図 1) に以下の FIR フィルタ (25 点平均) を適用する．

(2) FIR フィルタ (平滑化フィルタ) を適用し平滑化画像 (図 2) を得る．

(3) 平滑化画像 (図 2) に IIR フィルタ (逆平滑化フィルタ) を適用する．

(4) IIR フィルタ (逆平滑化フィルタ) を適用した画像 (図 3) と原画像を比較する．

$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

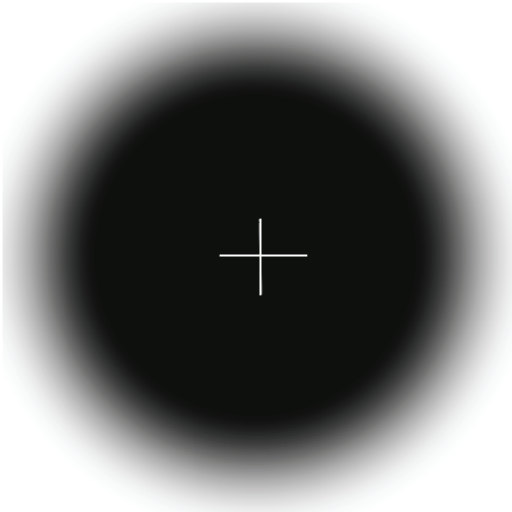

図 1: 原画像

図 2: FIR フィルタ処理画像

図 3: IIR フィルタ処理画像

5　まとめ

畳み込み処理を 2 次元に拡張した 25 点移動平均により得られるぼけ画像から原画像をある程度復元できる逆処理を構成することができた．ここで提案した方法を他の一般画像に適用できるように，実用性の高い手法の開発を目指して行きたい．

謝辞　本シンポジウム運営にあたり有益な助言を頂いた仁木滉教授（岡山理科大学）に感謝する．本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金（若手研究 (B)，課題番号 12345678）の助成を受けている．

参考文献

[1] 貴家仁志，デジタル信号処理，昭晃堂 (1997).