画像の解像度変換について

情報システム研究室　I15IM04
三　宅　勇　輔

１. はじめに

画像は 2 次元正方格子座標上で標本化された画素値 $f(x,y)$として扱う事ができる．この画像全体を重複して覆うようにして取り出した(n+1)×(n+1)画素ブロックで補間関数 $f_n(x,y)$を構成し，画素ブロック内で補間計算を行うことにより，元の標本点とは異なる座標上の画素値を新たに求め，画素数を増減させることで画像の解像度変換を行うことができる．補間関数は以下のようにして表すことができる．

$$f_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(x_i,y_j)\emptyset_{n,i}(x)\emptyset_{n,j}(y)$$

補間関数は，一般に，以下の性質を有する補間基底を用いて構成する．

$$\emptyset_{n,i}(x_k) = \delta_{ik} \quad , \quad \emptyset_{n,j}(y_k) = \delta_{jk}$$

計算量の観点から，2 次元正方格子座標上の標本点における画像値データを用いた 2 次元の補間計算を, 横及び縦方向の 2 段階に分けることにより, 1 次元正則格子座標上の補間関数を構成して実現する．例えば，k 行目から順次取り出した n+1 個の画素値$f(x_i,y_k)$に基づく 1 次元の補間関数$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i,y_k)\emptyset_{n,i}(x)$を構成し，必要とされる座標上で横方向の補間計算を行う．これを全ての行について適用し，同様にして，この結果を用いた列方向の 1 次元補間関数を構成し，縦方向に補間計算することにより，標本点数の異なる新しい 2 次元正則格子上の標本点において画素値を求め，解像度変換を行うのである．次節で解像度変換を構成する 1 次元正則格子座標に関する補間関数について考察をする．

２. 補間基底と適用区間

解像度変換を行うため，2 次元正方格子画素ブロックから縦もしくは横方向に，1 次元正則格子上の画素データ $f(x_k), k = 0,\ldots,n$ を取り出し，補間基底$\emptyset_{n,k}(x)$を用いて，補間公式を構成する．

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,\emptyset_{n,k}(x)$$

ここでは，以下に示す代表的な補間基底（Lagrange 多項式，sinc 関数，sinc-Lanczos 関数）を用いることにする．

$$\emptyset_{n,k}(x) = \begin{cases} \dfrac{F_n(x)}{F_n'(x_k)(x - x_k)} & ; \quad \text{Lagrange 多項式} \\ sinc(x - x_k) & ; \quad \text{sinc 関数} \\ sinc(x - x_k)sinc\left(\dfrac{x - x_k}{n}\right) & ; \quad \text{sinc} - \text{Lanczos 関数} \end{cases}$$

ただし $F_n(x) = (x + a)^n = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$, $sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ である．

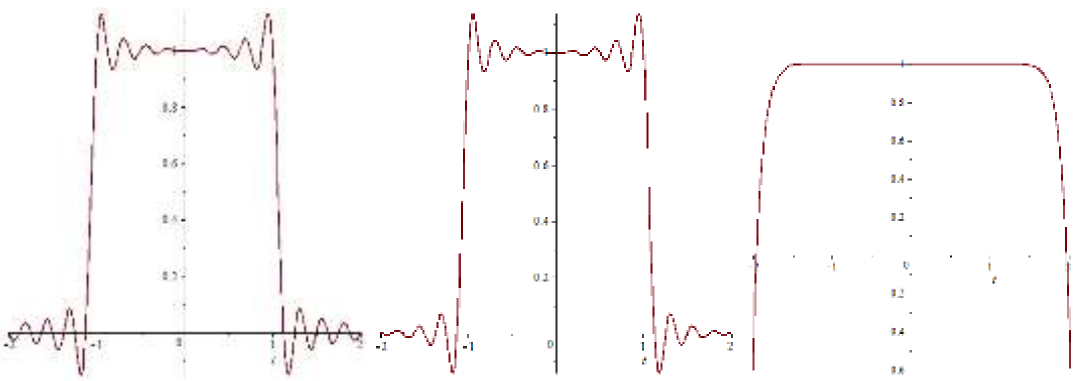
上述の補間基底を用いて補間計算を行う区間として，全区間$[x_0, x_n]$または中央部の小区間を選ぶ．中央部の小区間について補間計算をする場合は，補間関数を構成する 1 次元画素ブロックを小区間単位で計算区間をずらしていくことにする．中央部の小区間の幅は，n が偶数の場合には 2 標本化格子区間$[x_{(n/2)-1}, x_{(n/2)+1}]$となる．そして，n が奇数の場合には 1 標本化区間$[x_{(n-1)/2}, x_{(n+1)/2}]$となる．基底として sinc 関数または sinc-Lanczos 関数を用いるとき，一般に n は偶数となることを注記しておく．一方，基底関数として Lagrange 多項式を用いるとき，n が偶数または奇数のいずれであっても補間関数を構成することができる．ところで，上記補間基底を全区間$[x_0, x_n]$において用いると，多項式の場合には n の増加に伴いルンゲの現象により区間の端で大きな誤差の振動を生じる．一方，sinc 関数または sinc-Lanczos 関数を用いるとき，画素値の変化が大きな場所でギッブスの現象により細かな誤差の振動が発生する．このため，補間画像の画質を上げるため次数 n を高くすることができない．このような画質低下の原因となる誤差の振動は，全区間ではなく小区間単位(point wise)で補間計算することにより，回避できる．次節では簡単な関数の補間を例に挙げ，ルンゲの現象とギッブスの現象について解説する．

３．ギッブスの現象とルンゲの現象

補間に用いる基底に依存して，関数値が急峻な変化をする場所ではギッブスの現象が，関数値が相対的に小さくなる場所ではルンゲの現象が発生する．本節ではこれら現象と基底との関係を解説する．

３．１　不連続な定数関数の補間

画像中にある，対象物の諧調が一様である場合の数理モデルとして，領域 $x \in [-1,1]$ において $f(x) = 1$, 外では $f(x) = 0$ となる不連続な定数関数を考える．これを sinc 関数により補間すると，関数値の跳躍する場所 $x = \pm 1$で大きな誤差を生じる(図 1 (a),(b))．これをギッブスの現象という．このモデルの場合，sinc 関数および sinc-Lanczos 関数は，どちらを基底に用いても同様な誤差による振動，ギッブスの現象が表れている．

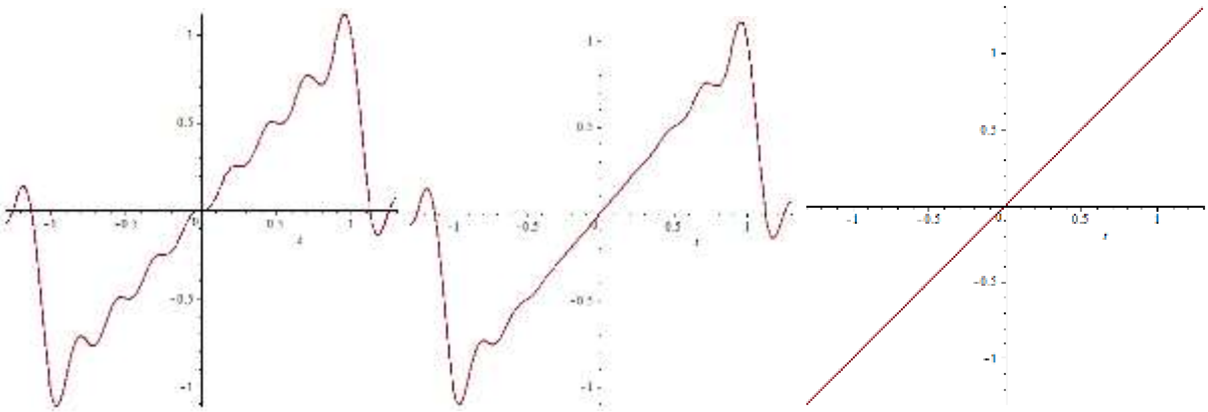


(a)sinc(n=16)　　(b)sinc-Lanczos c(n=16)　　(c)polynomial(n=16)

図１　画像中の対象物が階調の平坦な場合に相当する不連続な定数関数(n=25)

３．２　不連続な一次関数の補間

画像中にある対象物の階調が滑らかに変化する場合の数理モデルとして，区間 $x \in [-1,1]$ において $f(x)=x$, 外では $f(x)=0$ となる不連続な一次関数を考える．このモデルを sinc 関数により補間をすると，関数値の跳躍する場所$x=\pm 1$において誤差の振動が発生する(図２(a),(b))．この誤差の振動もギッブスの現象である．この関数の場合，sinc 関数にのみ中央部にも小さな誤差の振動が表れている．

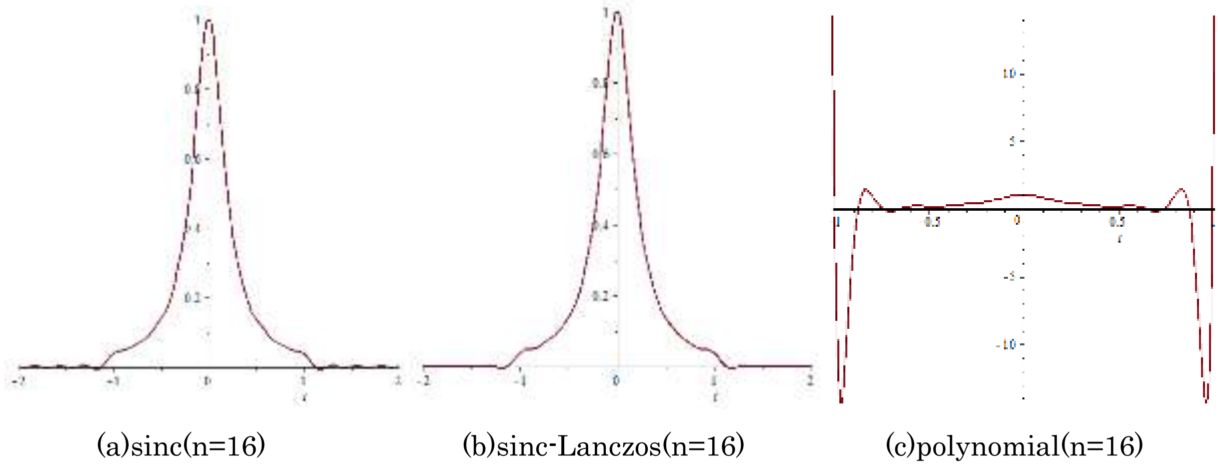


(a)sinc(n=16)　　(b)sinc-Lanczos(n=16)　　(c)polynomial(n=16)

図２　画像中の対象物の階調が滑らかに変化する場合に相当する不連続な一次関数

３．３　急峻な増減をする関数の補間

連続ではあるが急峻な変化をする数理モデルを高次多項式により補間すると，次数を高くするにつれて誤差の増大する現象の発生することがある．区間 $x \in [-1,1]$における有理多項式 $f(x) = 1/(1+25*x^2)$の場合が良く知られている．この有理関数のフーリエ変換係数すなわちコサイン変換係数の値は周波数の指数関数の様にして減少する．一方，多項式のコサイン変換係数は周波数の２乗分の１に比例して減少する．すなわち，この有理関数と補間多項式とは，高周波数成分に関して異なる振る舞いをすることになる．このため，多項式の次数を高くするにつれて，誤差値の振動が強調されるようになってくる．この誤差の大きな振動はルンゲの現象として知られている（図３(c)）．一方，多項式を用いた場合に生じるこの大きな誤差の振動は sinc 関数および sinc-Lanczos 関数を用いた場合には表れない．



(a)sinc(n=16)　　(b)sinc-Lanczos(n=16)　　(c)polynomial(n=16)

図３　画像中の対象物の階調が急激に増減する場合に相当する有理関数

４．画像による補間法の比較

定義区間の周辺部および中央部分における補間基底の振る舞いを比較した結果より，補間基底を適用するのは中央部分に限る方が，優れた補間結果の得られることは明らかである．本節では用いる補間基底による，解像度変換をした場合の画質の差異を比較検討する．ここでは標準画像 Lenna を用い，より大きな差異の発生する拡大処理(4 倍,n=8)をする．

(a) sinc　　(b) sinc-Lanczos　　(c) polynomial

図４　３種類の補間基底を適用して得られた拡大画像

基底に sinc 関数を用いると，輝度の細かな変動が生じることにより全体的に画質劣化が見られる（図４(a))．一方，sinc-Lanczos 関数を用いると，このような画質の低下は発生していないことがわかる．高次多項式を用いたものも同様に，画質の低下は見られなかった(図４(b),(c))．

５．結果と考察

補間基底を適用する区間を中央部分に限る方法で画像の拡大を行い，それぞれの補間基底による画質の差異の比較を行った．sinc 関数では全体的な画質の劣化が見られることがわかった．これは画像中にある対象物の階調が滑らかに変化する場所において，ギッブスの現象による誤差の(図４(a))振動が発生しているためであると考えられる(図２(a))．sinc-Lanczos 関数と高次多項式を用いたものではこのような劣化の発生しないことがわかった．どちらも，画像の比較による差は僅かしか見られなかった．画像中にある，対象物の諧調が一様である場合(図１)や，階調が滑らかに変化する場合(図２)において，sinc-Lanczos 関数と比較して，高次多項式は適用区間を多少広げたとしても画質の劣化が発生しないと考えられる．また，画像中の対象物の階調が急激に増減する場合(図３)においても，適応区間を狭めることにより画質の劣化は発生しないということがわかった(図３(c))(図４(c))．このことから，sinc-Lanczos 関数と比較して，高次多項式による補間の方が優れていると考えられる．

今後は，次数をより高くした場合，画質にどのような差異が現れるのかを確認していきたい．また，Lagrange 多項式を用いた高次多項式による補間と sinc-Lanczos 関数を用いた補間を組み合わせ，画像中のどのような階調の変化にも対応できる新たな補間方法が作成できるかどうかも検討していきたい．

参考文献

[1]画像拡大法の改善　竹崎仁美，山崎茜　岡山理科大学卒業論文 2013 年度

[2]Foundations of Signal Processing　Martin Vetterli，Jelena Kovačević，Vivek Goyal　Cambridge(2014)