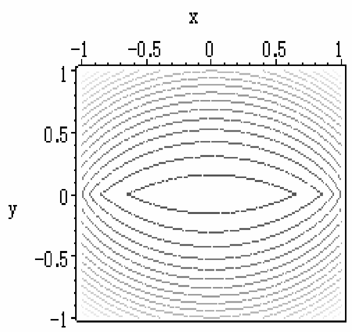
多項式補間とルンゲの現象

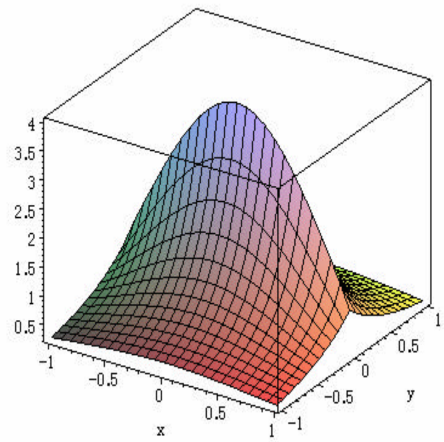
岡山理科大学総合情報学部情報科学科　澤見英男

多項式はコンピュータによる取り扱いが容易であることから，画像処理においても用いられることが多い。これは補間多項式による近似計算はプログラムが容易なためでもある。そして多項式の次数の増加に従って，滑らかな近似値の得られることが期待される。しかし関数の種類によっては，補間多項式の次数増加に伴って，誤差が大幅に増加してくる場合がある。例えば，富士山型の関数（またはその逆の形をした関数）の場合，標本点を等間隔にすると，誤差が次数に関する指数関数倍に増幅されてしまう。このようなトラブルをルンゲの現象という。簡単のため区間［－1，1］における補間を考える。補間近似の対象である元の関数の複素平面上の極を z とすると，多項式の次数を高くした場合，補間誤差が次式の絶対値を次数べき乗したものに比例することから，次数の増加に応じて指数関数的に補間誤差の増加することがある（例えば，森正武著「数値解析」共立出版を参照）。

$$S := 4\,\frac{(z-1)^{(z-1)}}{(z+1)^{(z+1)}}$$

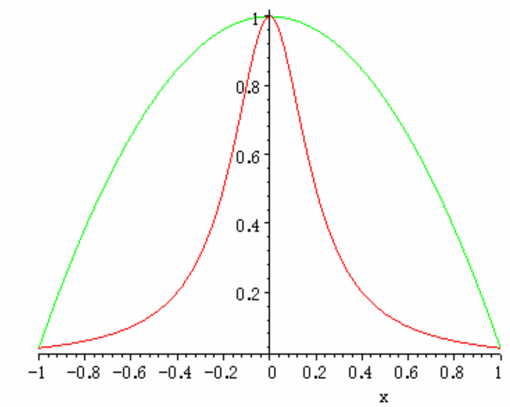
複素関数Ｓの絶対値を複素平面上 [-1,1]×[-1,1] **において等高線表示すると以下のようになる。**



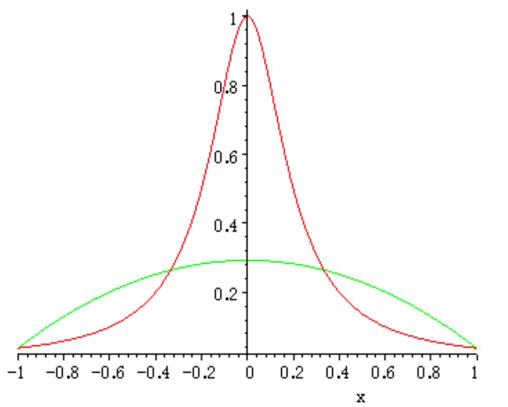


元の関数に極が存在しそれが上図（左側）の枠に接したレンズ状領域内に含まれる場合には，多項式の次数の増加に応じて誤差が増加していく。別の見方をすれば，極が上図（右側）の山状の高度の高い部分に対応して位置している場合には，その高さに応じて誤差が増加する。例えば頂上部近辺に位置していると，高次補間多項式を用いた場合，誤差が４の次数乗倍に増幅される。画像を数値表現したものが以下に例示した関数に類似する場合には，このトラブルに巻き込まれてしまう。これが画像の解像度変換に高次の多項式を使えない大きな理由でもある。

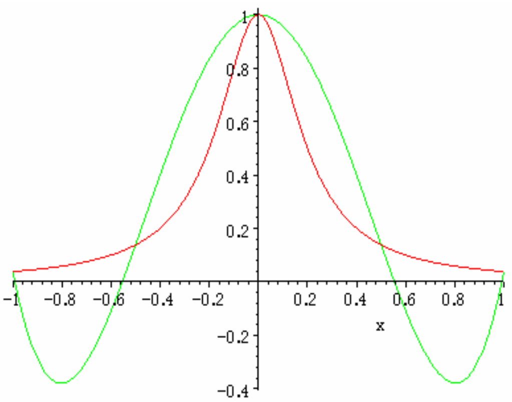
例として，関数　1/(1+25x^2)　を補間近似した場合の誤差の振舞いを示す。次数は２から７までとした。なお交点の数は次数＋１となる。この関数は±0.2 i に極を有している。この場所における高度は約２となるので，高次において誤差が２の次数乗倍に増幅されることになる。



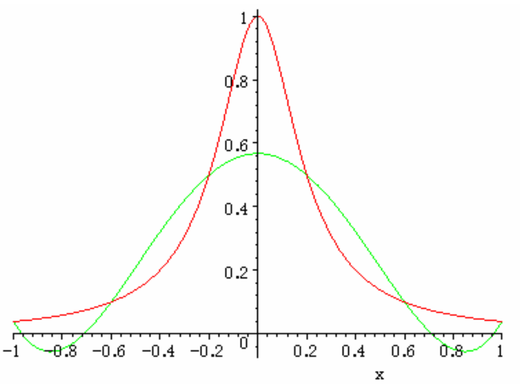
次数＝２



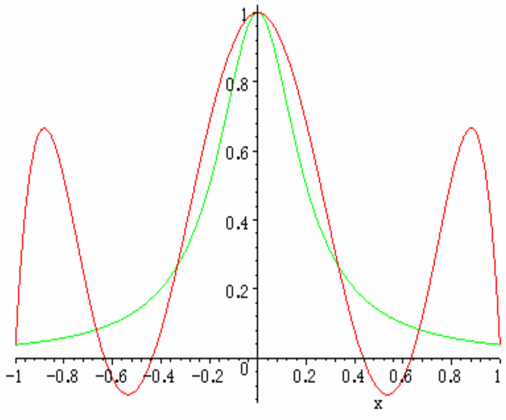
次数＝３



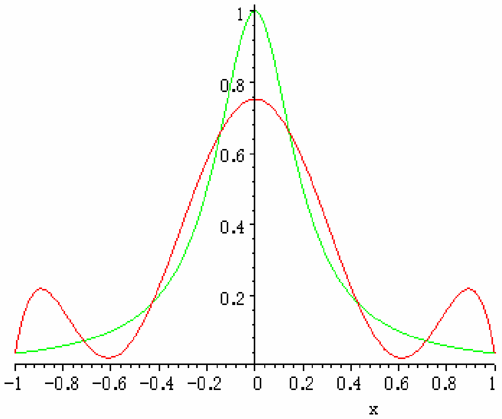
次数＝４



次数＝５

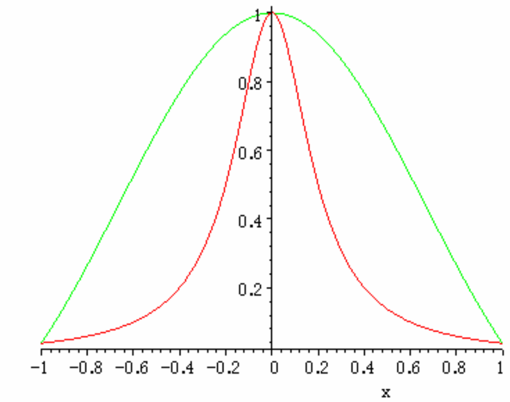


次数＝６

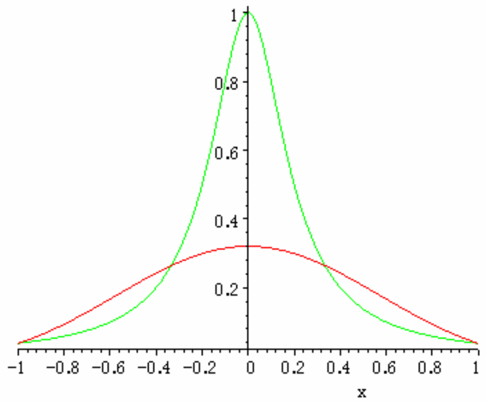


次数＝７

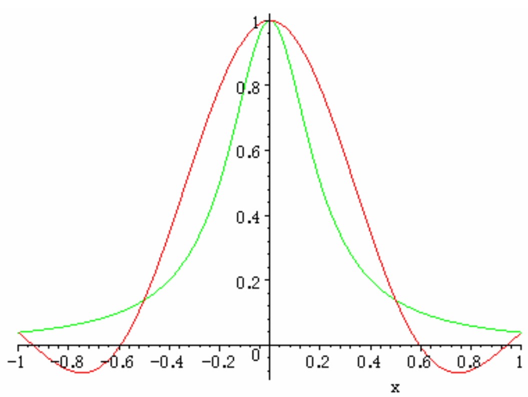
一方，ある特定の標本点で値が１そして他の標本点で値がゼロとなるような関数と，この標本点における元の関数値との積和（線型結合）により補間近似することも可能である。このようなものとして sinc 関数(sin(x)/x)を選び，前と同様にして補間近似した場合の計算結果を以下に示す。この補間関数の場合には，多項式関数で問題となったルンゲの現象は発現せず，また対応する図の比較からも容易に分かるように，標本点数の増加に伴い補間精度が向上する。



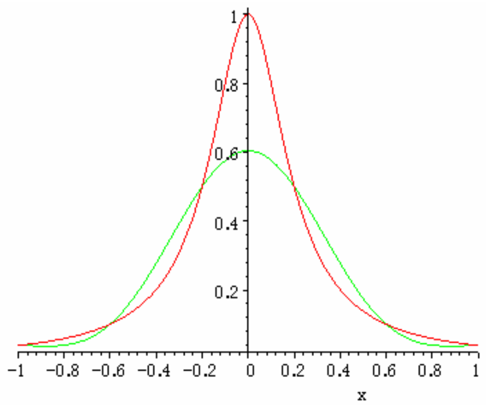
標本点＝３



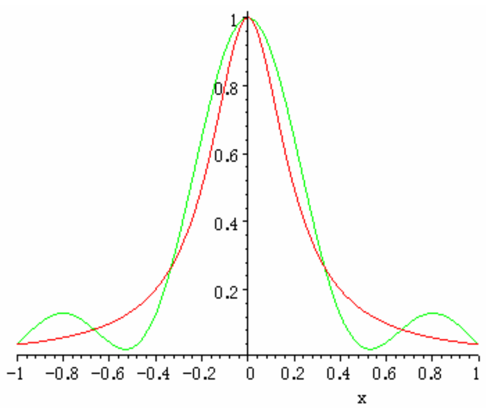
標本点＝４



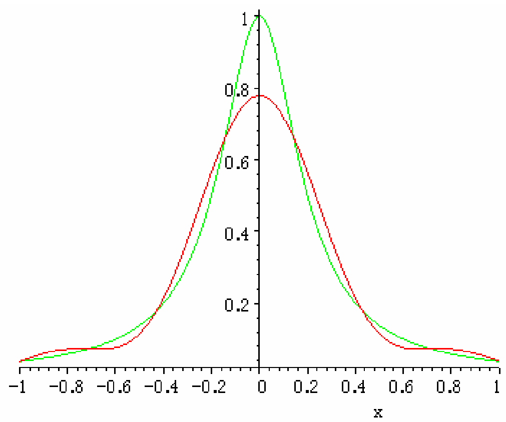
標本点＝５



標本点＝６

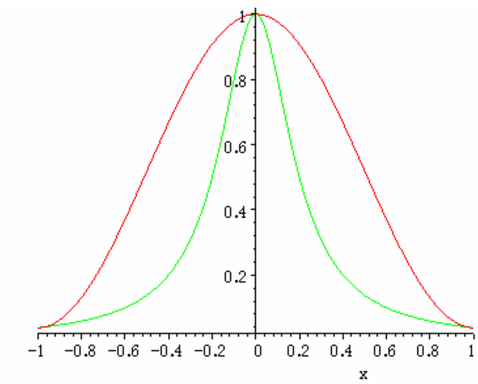


標本点＝７

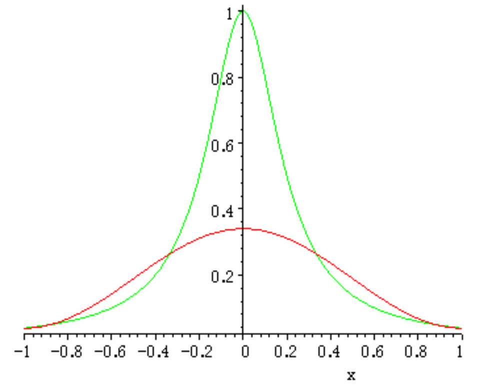


標本点＝８

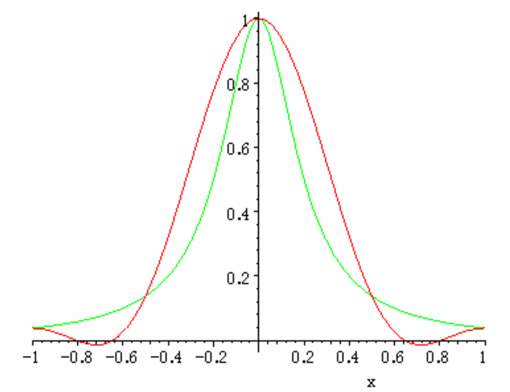
さらに，直交関数と標本値から得た変換係数との線型結合による補間近似も可能である。例として，フーリエ変換の一種である離散コサイン変換（DCT）による，同様の標本点数に関する結果を図示する。sinc 関数によるよりもさらに良い結果の得られていることが分かる。



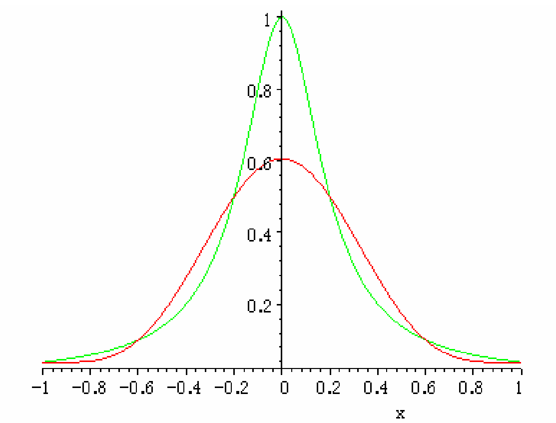
標本点＝3



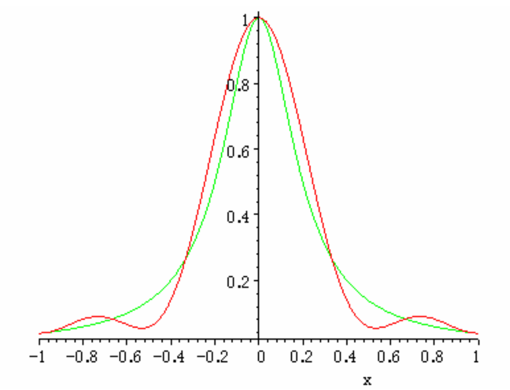
標本点＝4



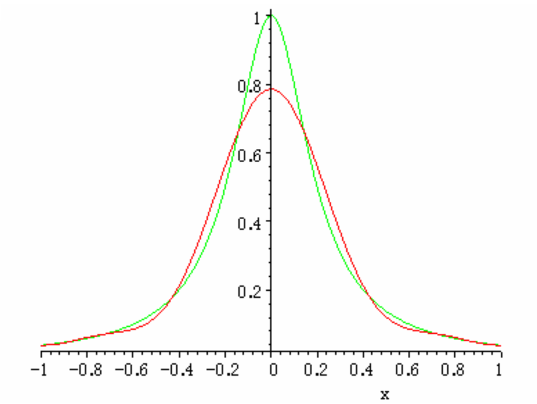
標本点＝5



標本点＝6



標本点＝7



標本点＝8

以上，ある特定の関数を取り上げて各種補間法を適用し近似した場合の比較を行い，画像データに補間法を適用した場合の，問題点と差異について簡単な議論・紹介をした。