

日照時間の計算について

岡山理科大学 情報科学科 澤見英男

1 基本的な座標変換について

地球の自転、公転、地軸の傾きそして緯度と経度を考慮した計算により日照時間や日照量を求めるためには、以下に示すような座標変換により、緯度と経度により指定された地球表面上の地点に関する座標変換、そして座標点に関連した法線ベクトルと太陽からの輻射光に関連したベクトルとの内積計算なども必要となる。ここでは導入部として、基本的な座標変換の解説をする。

3次元座標における点(X,Y,Z)をx軸の周りで角度 ψ だけ回転操作して得られる点の座標(x, y, z)は、行列 R_ψ と縦ベクトルにより表すと、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_\psi \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

同様にして、3次元座標における点(X,Y,Z)をy軸の周りで角度 α 回転操作して得られる点の座標(x, y, z)を、行列 R_α を用い次のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_\alpha \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

さらに、3次元座標における点(X,Y,Z)をz軸の周りで角度 γ だけ回転させて得られる点の座標(x, y, z)を、行列 R_γ を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_\gamma \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

これらの結果を用いると、点(X,Y,Z)を最初はx軸の周りで ψ 回転し、次にy軸の周りで α 、最後にz軸の周りで γ 回転操作して得られる点の座標(x, y, z)は次のように表すことができる。勿論、ひとつの行列で表すこともできる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_\gamma R_\alpha R_\psi \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

2 地球と太陽の関係について

地球の中心を3次元座標の原点に置き、太陽はx軸上の十分遠方から地球を照らしていると考え、そしてz軸の正方向に地球の北極そして負方向に南極を配置する。地軸の傾きと日照時間および日照量との関係を定式化するために座標変換を用いる。最初は自転を考慮し、z軸周りを角度 ϕ で回転させ、次に地軸の傾きを考慮して、x-z平面上でy軸周りに角度 α 回転させ、最後に公転を考慮して、x-y平面上でz軸周りに角度 γ 回転させることにする(図1)。地球表面の座標を縦ベクトルにより表すと、回転操作を纏めた行列は $R_\gamma R_\alpha R_\phi$ となるが、計算が煩雑にならないよう簡略化のための工夫をする。

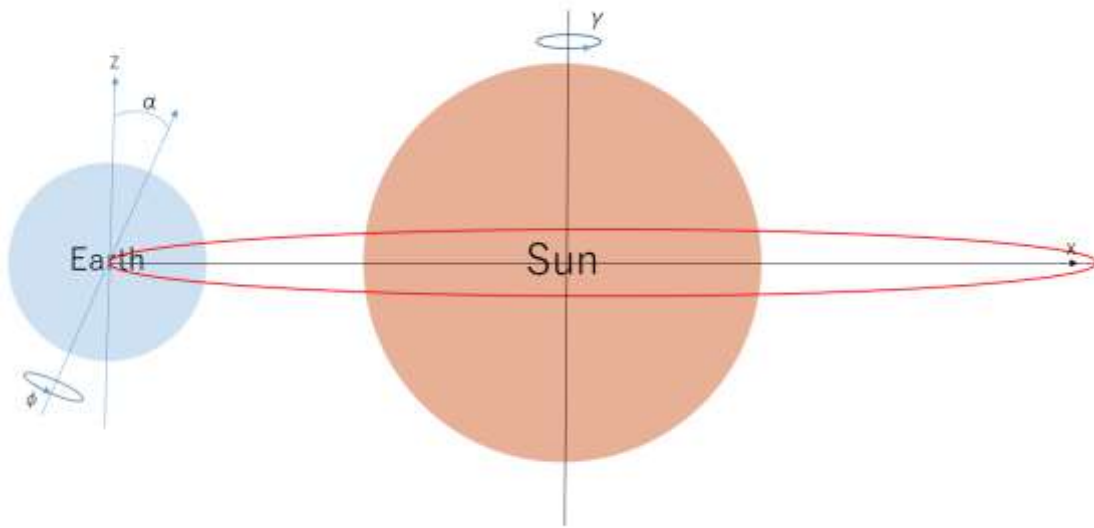


図1 公転軌道と地軸の傾き

3 夏至の日の昼夜の長さを求める座標計算について

以下の計算手順に従い、太陽から地球を見て表（昼）もしくは裏（夜）のどちら側かを、特定地点の x 座標値の正負により判定する（右手座標系）。

- (1) 赤道(equator)を $x y$ 平面に置き、地軸を傾けるための座標計算をする前に、 z 軸が南北の両極点を通るよう設定する（図1）。
- (2) 日照時間を求めるため、地球表面を昼夜へと二等分する。北緯 β 度東経零度を $x z$ 平面上の点であるとする、地球の半径を1とした場合の座標 $(x = -\cos \beta, y = 0, z = \sin \beta)$ および法線ベクトル $(-\cos \beta \ 0 \ \sin \beta)$ を得ることができる。
- (3) これらの座標データに対し、地軸を角度 α 傾ける処理をする。この地点における法線ベクトルに対し y 軸周りで角度 α の回転操作（座標変換）を行うことにより、以下に示す北緯 β 経度 ϕ での法線ベクトルが求まる。

$$(\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \cos \phi \quad -\cos \beta \sin \phi \quad \sin \alpha \cos \beta \cos \phi + \cos \alpha \sin \beta)$$

- (4) 公転面上の回転角度 γ に対応する太陽光ベクトル $(\cos \gamma \ \sin \gamma \ 0)$ と法線ベクトルとの内積を求め、この値の正負から昼夜の判別をする。

$$\cos \gamma (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \cos \phi) - \sin \gamma \cos \beta \sin \phi$$

- (5) 経度 ϕ を内積の正負により決めるため、夏至または冬至において $\gamma = 0$ または π となるので、内積の式を簡略化する。これは手順（3）で求めた法線ベクトル x 座標成分の正負と角度 ϕ との関係式と同じになる。

$$\phi = \arccos(\tan \alpha \tan \beta) \quad \text{if } |\tan \alpha \tan \beta| < 1$$

$$\text{where } \phi = \pi \quad \text{if } \tan \alpha \tan \beta < -1 \quad \text{or} \quad \phi = 0 \quad \text{if } \tan \alpha \tan \beta > 1$$

(6) 得られた角度 ϕ は昼夜の境目に対応する経度でもあり，角度 2π が 24 時間に対応することから，角度 2ϕ を日照時間とすることができる。

表計算ソフト「EXCEL」を用い，北緯 35 度における日照の程度，昼夜の判別をする (図 2)．縦軸は相対的な日照の程度を示し，正值は太陽が水平線の上で昼であることを，負値は水平線の下で夜であることを意味している。

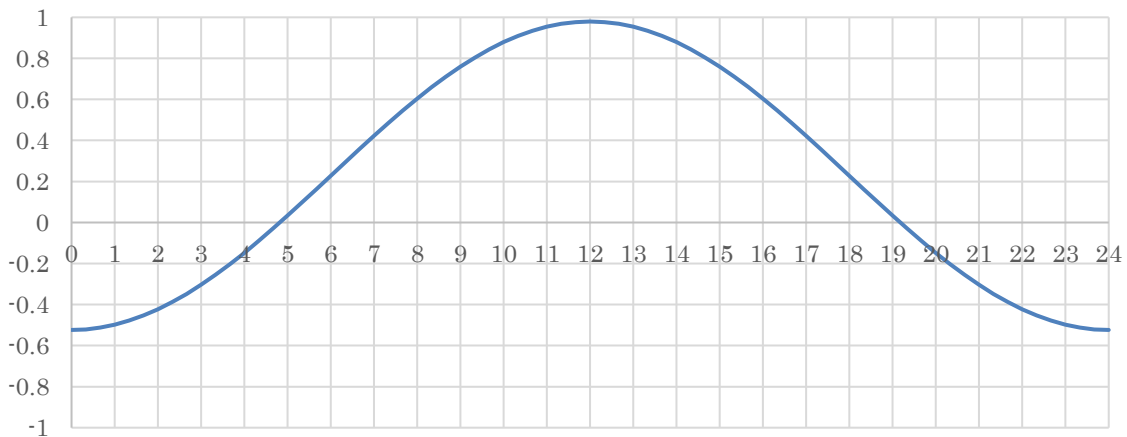


図 2 夏至の日の出と日没

緯度は 35 度，横軸は時刻に対応する，地軸の傾きは 23.43 度

4 日照時間の季節変動と地軸の見かけの傾き角度について

前で行った日照時間の計算は，地球に対応させた球体を x 軸周りで回転させたとしても $y z$ 平面から見た傾きは変化しないことから，同じ結果になることに注目する．この球体は角度 α だけ y 軸周りで回転している．そこで公転面に垂直な z 軸周りで球体を季節に対応させた角度 γ だけ回転させ，それにより $y z$ 平面に対する傾きの角度 θ を求め，この角度 θ を先に得た昼夜の長さの計算式中の角度 α に代入することにより，季節変動を計算することができる。

(a) 季節変動に対応する公転面に垂直な公転角度 γ の面上で，太陽から見た地軸の傾き角度 θ の満たす式を内積(射影)から導出することができる。

$$\tan \theta = \tan \alpha \cos \gamma$$

(b) これより太陽から見た地軸の見かけの傾き角度 θ が得られる。

$$\theta = \arctan(\tan \alpha \cos \gamma)$$

(c) この傾き角度 θ を先に得た昼夜の長さの計算式中の地軸本来の傾き角度 α に代入すると，日照時間の季節変動に対応する角度 ϕ が求まる。

$$\phi = \arccos(\tan \theta \tan \beta) \quad \text{if } |\tan \theta \tan \beta| < 1$$

$$\text{where } \phi = \pi \text{ if } \tan \theta \tan \beta < -1 \quad \text{or} \quad \phi = 0 \text{ if } \tan \theta \tan \beta > 1$$

5 地軸の傾きを考慮した日照量の季節変動の計算について

北緯 β 度および経緯 ϕ の地点における日照の強さを、太陽から見た見かけの地軸の傾き角度 θ に関し、北緯 β 経度 ϕ における法線ベクトルと太陽光の方向を表すベクトル $(-\cos \gamma \quad -\sin \gamma \quad 0)$ との内積を用いて評価することができる。

日照量の積分は、昼になっている期間について、時間に対応する角度 ϕ に関し近似計算により行うことができる。ここでは角度 ϕ の刻み幅を適切に選び、日照の強さの年間総量を台形公式に基づく数値積分を使って近似する。

表計算ソフト「EXCEL」を用いたここでの計算例から2行目を取り上げてその計算手順を示す(図3)。A欄には季節に対応する公転軌道を表す角度 γ を与え、C欄のC2セルにはこの角度 γ に対応する太陽から見た地軸の傾き角度 θ を計算式 $=\text{ATAN}(\text{TAN}(\$M\$2*\text{PI}/180)*\text{COS}((180+A2)*\text{PI}/180))$ 、F欄のF2セルには昼夜の長さの計算から得られる日照時間に関する計算式

$$=\text{IF}(\text{TAN}(-C2)*\text{TAN}(\$N\$2*\text{PI}/180)<-1, 24, \text{IF}(\text{TAN}(-C2)*\text{TAN}(\$N\$2*\text{PI}/180)>1, 0, \text{ACOS}(\text{TAN}(-C2)*\text{TAN}(\$N\$2*\text{PI}/180))*2/\text{PI}*12)),$$

そしてセルG2には日照量を計算式 $=\text{F2}*\text{ABS}(\text{COS}(-C2+ \$N\$2*\text{PI}/180))$ により得ている。ただし必要な定数、地軸の傾き α をセル $\$M\1 に、緯度をセル $\$N\1 に、年の始まりに関する γ のオフセット角度を所定のセルに入力しておく。また、角度 γ および月に対応しているAおよびB欄には、自動計算機能を利用し適切な刻み幅(例えば5度)になるよう必要なデータを準備する。

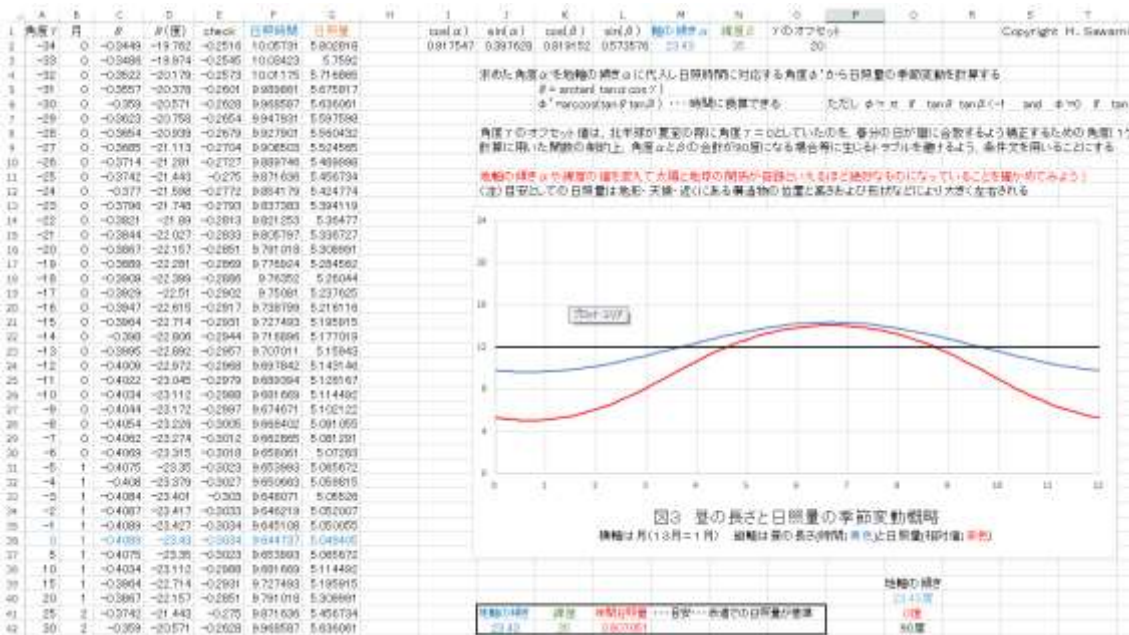


図3 日照時間と日照量の季節変動を計算

日照時間と日照量の季節変動を計算するためのワークシート例

こうして準備のできた2行目のセルを選び、オートフィル機能により必要な範囲内の自動計算を済ませ、この結果を使い作図をすることで日照量の季節変化の様子を知ることができる(図3)。このワークシートから、地軸の傾き α が23.43度、緯度 β が35度における日照量の季節変動を示す(図4)。

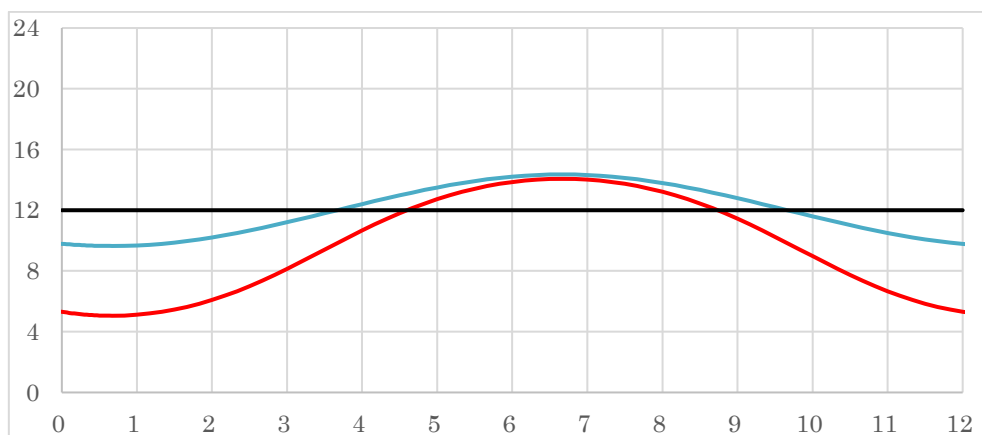


図4 地軸の傾き23.43度における日照時間と日照量の季節変動
緯度は35度、横軸は季節(月)、縦軸は日照時間(青)と相対的な日照量(赤)

6 地軸の傾きと高緯度地域における白夜の出現について

高緯度($90 - \alpha$ 度よりも緯度が高い)においては白夜が出現する。例として、緯度 β を80度にして、白夜の出現することを確認してみる。緯度 β が80度の高緯度地域では、4月中頃から8月末までが白夜になっている(図5)。

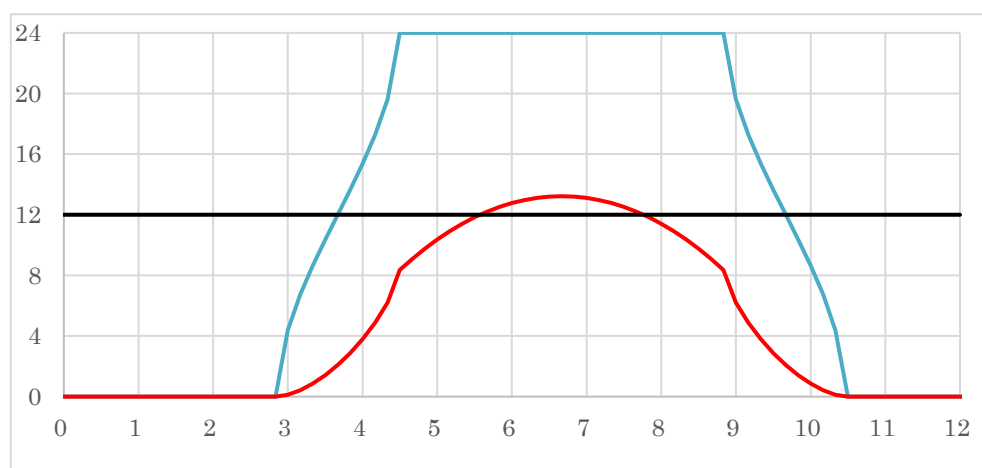


図5 高緯度地域における白夜の出現

緯度は80度、横軸は季節(月)、縦軸は日照時間(青)と相対的な日照量(赤)

白夜の一番長くなるのは極地である。緯度 β が90度の北極における日照量の

季節変化も計算により確かめることができる。この計算結果から、北極においては3月末から9月末頃まで、半年間が白夜になることを確認できる(図6)。

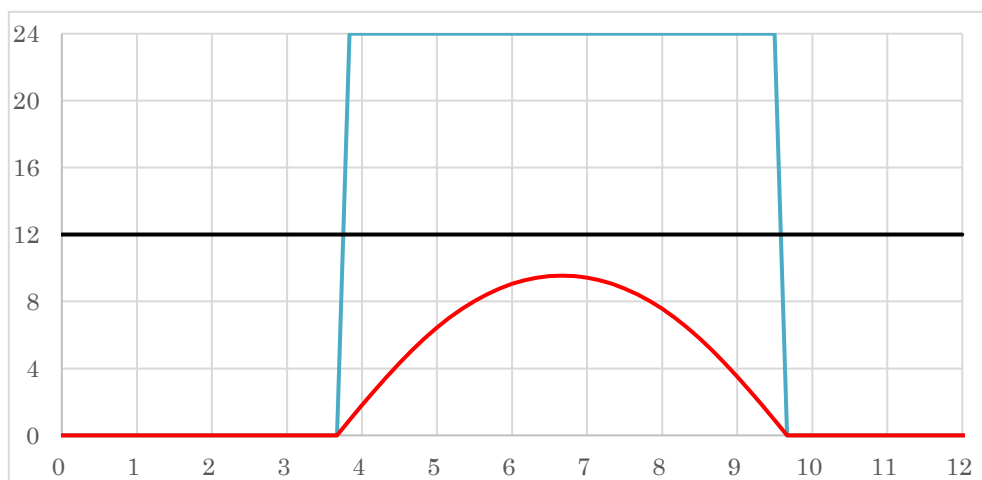


図6 北極地域における白夜の出現

緯度は90度、横軸は季節(月)、縦軸は日照時間(青)と相対的な日照量(赤)

簡単な計算と作図により、高緯度地域では日照量が少ないだけでなく、白夜の出現を確認することができた。

7 緯度により異なる年間日照量と地軸の傾きについて

地球が真球であり雲が全く無いという条件のもとで、地軸の傾きが変化した場合の、年間日照量の緯度による差異を比較することができる(5度刻み)。

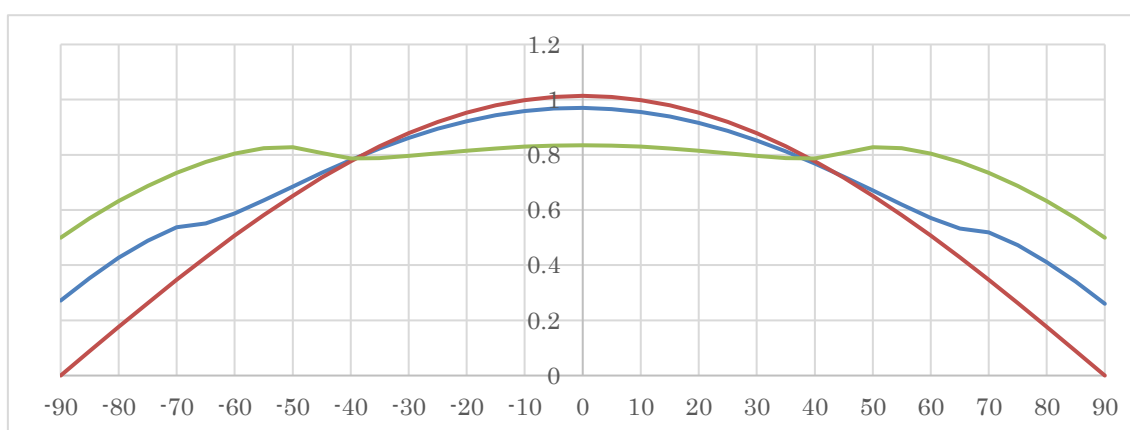


図7 緯度と年間日照量と地軸の傾き

横軸は緯度 β 、縦軸は日照量、地軸の傾き α は零度(赤)、23.43度(青)および45度(緑)

年間日照量は、数値積分で求めることにする。角度 γ を5度刻みにして、角

度 0 度から 360 度までの範囲で日照量を求め、台形公式を用い年間日照量を近似する。さらに、地軸の傾き α に対し緯度 β における年間日照量がどの程度依存しているのかを比較できるように、地軸の傾き α として 23.43 度と零度および 45 度の 3 通りを選ぶことにする（この例ではセル L42 に計算し集計する）。

この結果より、地軸の傾き α が零度では赤道の年間日照量が最大になるが極地の年間日照量は零という極端な状況になることがわかる。一方、地軸の傾き α が 23.43 度の場合には緯度による日照量の差が緩和され、南北両極地における日照量が赤道の 30 パーセント近くもあることなどがわかる（図 7）

8 地軸の傾きにより異なる日照量の季節変化について

地軸の傾きにより、年間日照量の緯度による差異の大きく緩和されていることが確認できた。ここでは、緯度を同じにして地軸の傾き α だけを変えた場合の日照量の季節変動を比較する。例として、緯度を 34.65 度と 0 度に固定し、地軸の傾き α に 23.43 度を選んだ場合の日照量の季節変動（図 8）および、地軸の傾き α を 45 度にした場合の日照量の季節変動（図 9）を求める。

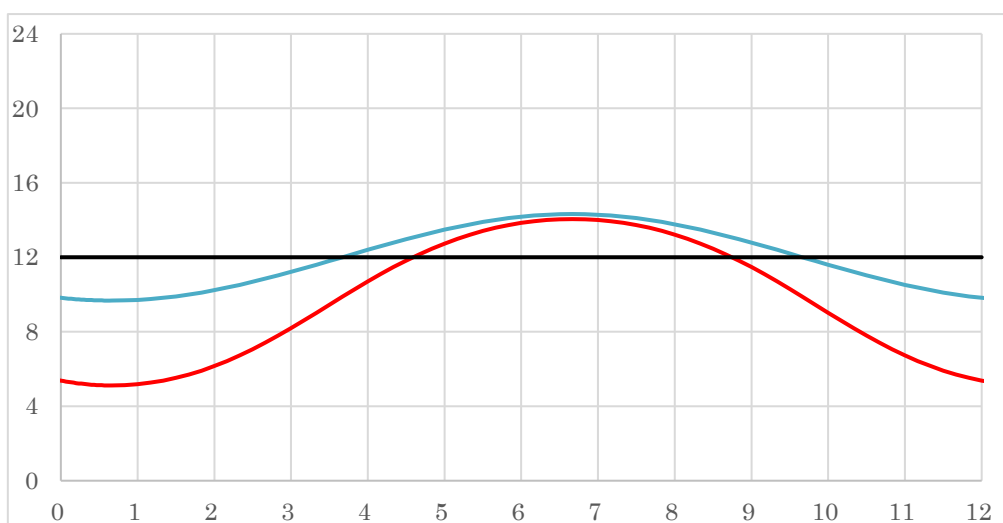


図 8 地軸の傾き 23.43 度における日照時間と日照量の季節変動

緯度は 34.65 度、横軸は季節(月)、縦軸は日照時間 (青) と相対的な日照量 (赤)

緯度を固定して日照量の季節変動（最大値と最小値の間の変化）を比較した結果、地軸の傾き 23.43 度（図 8）における変化は 4 期に区分できそうな様相を示している。夏冬の部分は安定した季節であること、春秋相当の期間においては移ろいやすい季節といった様相を示していることがわかる。一方、地軸の傾き 45 度での季節変動は、春秋相当の部分における変化が急峻かつ大きいことから、冬と夏だけの 2 期にしか季節としては区分できないように思えてしまう。

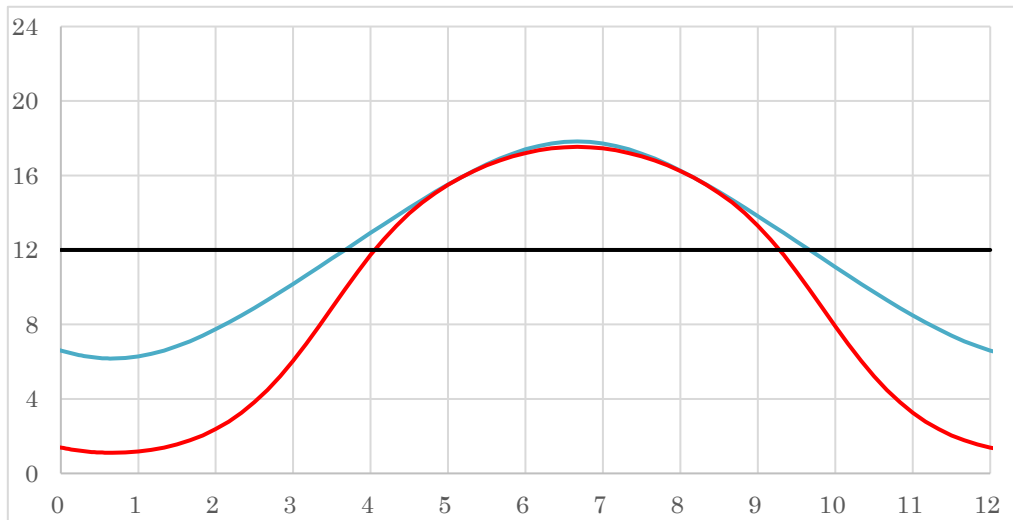


図9 地軸の傾き 45度における日照時間と日照量の季節変動

緯度は 34.65 度, 横軸は季節(月), 縦軸は日照時間 (青) と相対的な日照量 (赤)

地軸の傾き 23.43 度に対し 45 度と, 地軸がここまで傾いてしまうと, 夏冬の季節間の差異が開くだけではなく, 春秋相当の期間での日照量変化が大きく急峻であることから, この期間を季節として区切るのは難しくなると思える. さらには夏冬の季節間の差異がかなり大きくなっていることを注記しておく.

9 赤道における日照量の季節変化と地軸の傾きについて

地軸の傾き 23.43 度と 45 度について, 赤道における日照時間と日照量の季節変動と地軸の傾きとの関係にどの程度の差異があるのかも調べてみる.

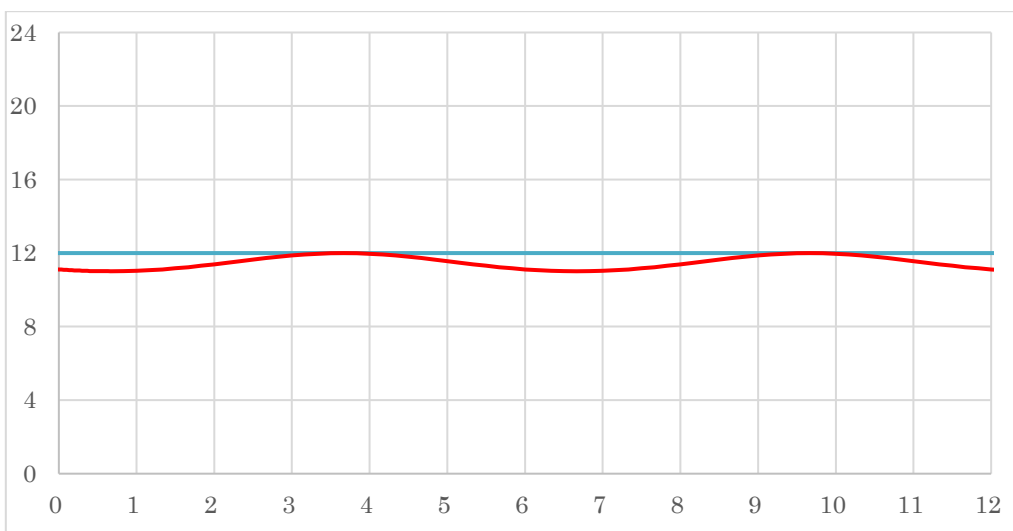


図10 地軸の傾き 23.43度での赤道の日照時間と日照量の季節変動

緯度は 0 度, 横軸は季節(月), 縦軸は日照時間 (青) と相対的な日照量 (赤)

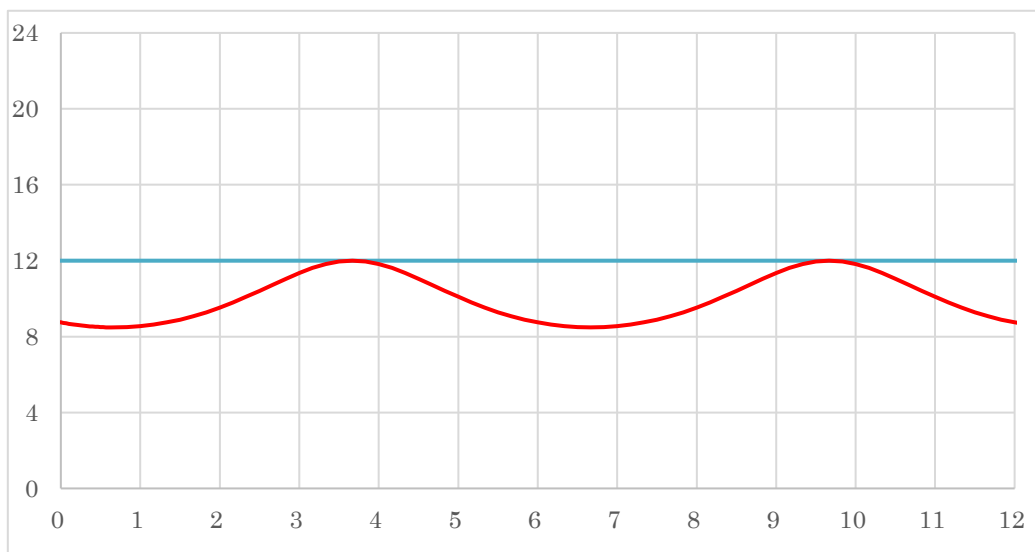


図 1.1 地軸の傾き 45 度での赤道の日照時間と日照量の季節変動

緯度は 0 度，横軸は季節(月)，縦軸は日照時間 (青) と相対的な日照量 (赤)

赤道における季節変動の比較によると，地軸の傾き 23.43 度では季節といった区別ができそうに無いのに対し，地軸の傾きが 45 度になると，例えば春と夏とが繰り返しているような季節の変化を観測できそうな様相が現れている。

なお地軸の傾き 90 度の場合，ここまで見てきたような年間日照時間の緯度による差異は小さくなりそうである。さらに，日照量の季節変動は 45 度の場合よりもさらに大きなものになって，白夜の暑い夏と闇夜の続く寒い冬といった極端な季節を繰り返すことになってしまいそうである。

簡単な計算による比較ではあったが，よく聞く言葉「奇跡の惑星」の通り，地球は絶妙なバランスを保っていることを実感できたのではないだろうか。

ところで地軸の傾き 23.43 度での地域による気候の差異は，日照量だけでなく，大域的な雲の有無などの気象条件や，海や湖それに山や河の有無などといった地理的条件の差異に大きく依存していることを注記しておく。

1.0 レポート課題

元旦を海外で過ごす予定なので，現地の日出と日没時刻を調べることになった。配布 EXCEL ファイルを用いた計算結果とウェブによるものとを比較し，考察を加えてまとめたレポートを次々回講義開始時に提出してください。

メモ：この資料は商業目的外であれば自由に利用することができる。

最新の資料は <http://cafe.mis.ous.ac.jp/sawami/> にて公開されている。