

表計算ソフト「エクセル」を用いたコンピュータグラフィックス

岡山理科大学 情報科学科 澤見英男

この資料は、3次元空間における座標変換について学び、表計算ソフト「エクセル」の計算／作図機能を用いた3D-CGの簡単な演習を通して、膨大なオブジェクトから構成されているCGの一端についての理解を深めるべく用意されたものである。

1 2D-CGの作図例

座標の回転および平行移動については(2)3D-CGの基礎知識にて扱うので、ここではエクセルを用いた作図例を取り上げ、計算機を用いた製図法・・・2次元座標上のコンピュータグラフィックスの一端を実感してみることにする。エクセルを立ち上げ、以下のワークシート表示例を参考にしながら、作図作業に慣れるための練習から始めよう。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ラジアン= $\theta \times (\pi / 180)$			円周率 π	半径 R				
2				3.141593	5				
3	θ (度)	$x=R\cos(\theta)$	$y=R\sin(\theta)$						半径5の円を36角形として描く
4									
5									
6									

図1 各種定数とコメントなどの入力

絶対参照し用いるセル\$D\$2は式=pi()または円周率の値3.14159265358979323846を、セル\$E\$2には半径Rの値5を入力する。次に、相対参照するセルA4には角度 θ (工学単位)の初期値0を、セルA5には式=A4+10を入力する。相対参照セルA5をポインタが太い十字になるようマウスで指示し、左ボタンを抑えたまま下向きにドラッグすると、以下のような結果が得られる。角度 θ が360になるまで行う。絶対／相対参照は行とか列の前の記号\$の有／無で識別できることから、以降では、絶対／相対参照の説明を略する。

A5		fx =A4+10								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	ラジアン= $\theta \times (\pi / 180)$			円周率 π	半径 R				青色の数値	
2				3.141593	5					
3	θ (度)	$x=R\cos(\theta)$	$y=R\sin(\theta)$						半径5の円を36角形として描く	
4	0							$x=R\cos(\theta)$		
5	10							$y=R\sin(\theta)$		
6	20									
7	30									
8	40									
9	50									
10	60									

図2 作図する範囲を角度で指定

円周を36分割する頂点のx座標に対応するセルB5は式=\$E\$2*COS(\$A4/180*\$D\$2),

y 座標に対応するセル C5 は式= $=E\$2*\text{SIN}(\$A4/180*\$D\$2)$ により、座標値を計算する。座標の値が正しく求めたことを確認してからセル B4 と C5 を選択する。ポインタが太い十文字になるようマウスで指示し、左ボタンを抑えたまま下向きにドラッグすることで、自動計算機能により、以下のような結果を得ることができる。角度 θ が 360 になるまで行う。

B4		fx = $=E\$2*\text{COS}(\$A4/180*\$D\$2)$							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ラジアン= $\theta \times (\pi/180)$			円周率 π	半径 R				青色の数値
2				3.141593	5				
3	θ (度)	$x=R\cos(\theta)$	$y=R\sin(\theta)$						半径5の円を36角形として描く
4	0	5	0						$x=R\cos(\theta)$
5	10	4.9240388	0.8682409						$y=R\sin(\theta)$
6	20	4.6984631	1.7101007						
7	30	4.330127	2.5						
8	40	3.8302222	3.213938						
9	50	3.213938	3.8302222						
10	60	2.5	4.330127						

図3 絶対参照と相対参照を使い分けた座標の自動計算

上の例では、セル B 5 の値は 5 ($=5*\cos(0)$) そしてセル C 5 の値は 0 ($=5*\sin(0)$) などと正しく計算されている。必要な範囲で正しく計算のできていることを確認したら、以下に示すように、作図に用いる頂点の x y 座標を選択する。次に挿入リボンを選択し、その中の散布図プルダウンメニューから散布図 (直線) を選ぶことにする。

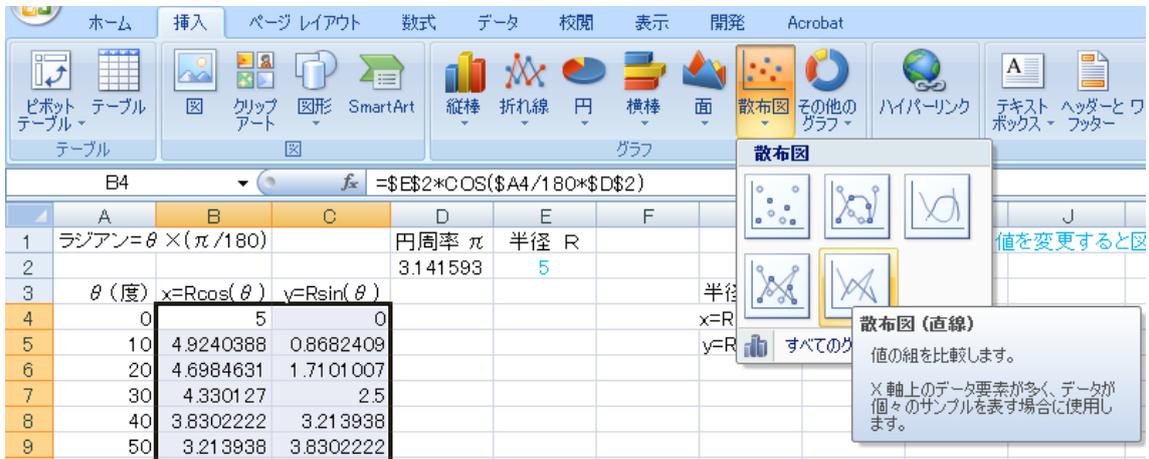


図4 作図メニューの中から散布図を選択

こうして得られた結果に手を加えることにより、以下のような円を描くことができる。グラフの体裁については、大まかな形はマウスで整え、その他についてはキーワード「凡例、座標軸など」を用いヘルプを使って調べ、好みのものになるよう仕上げると良い。

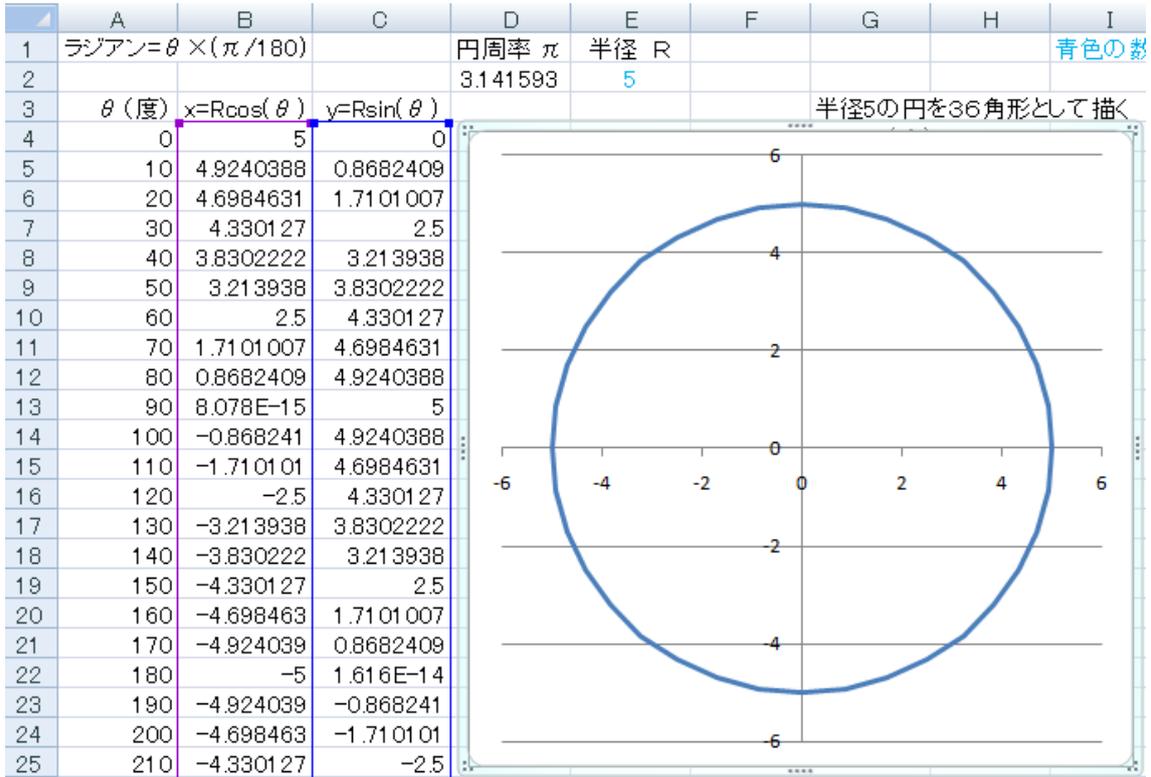


図5 縦軸と横軸のスケールを調整して描画

必要な個数だけ頂点の x y 座標を求め、幾何的な図形を描くことができる。例として、螺旋状の図形とスピログラフ様の描画例を示す。座標を計算する式だけが異なっている。

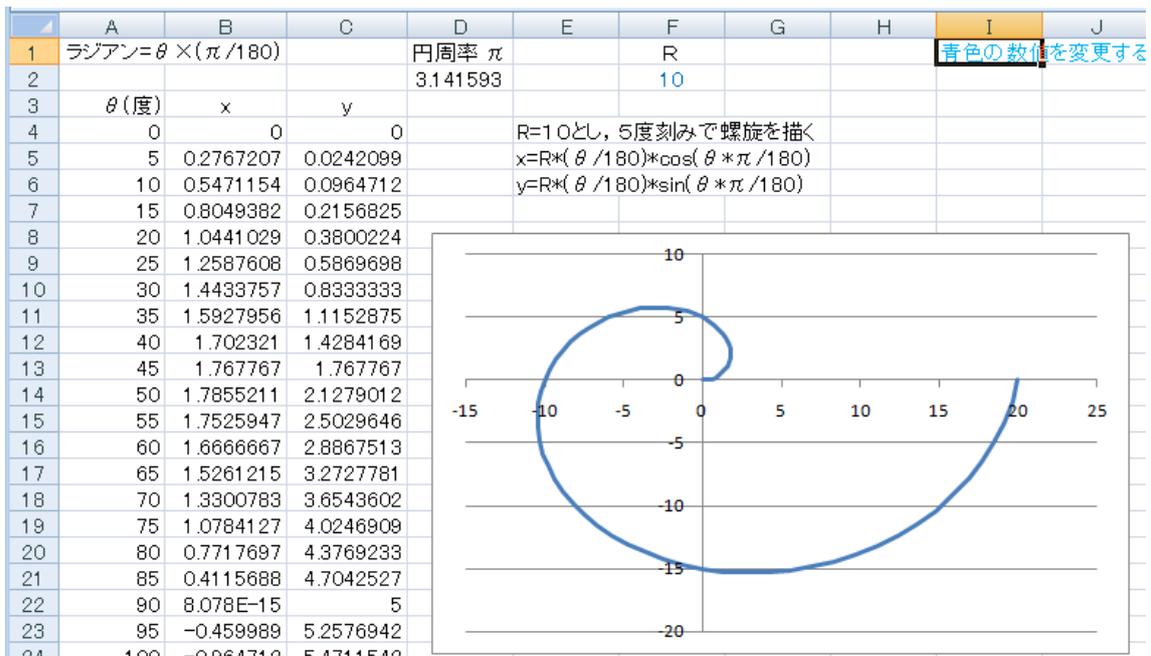


図6 螺旋の描画

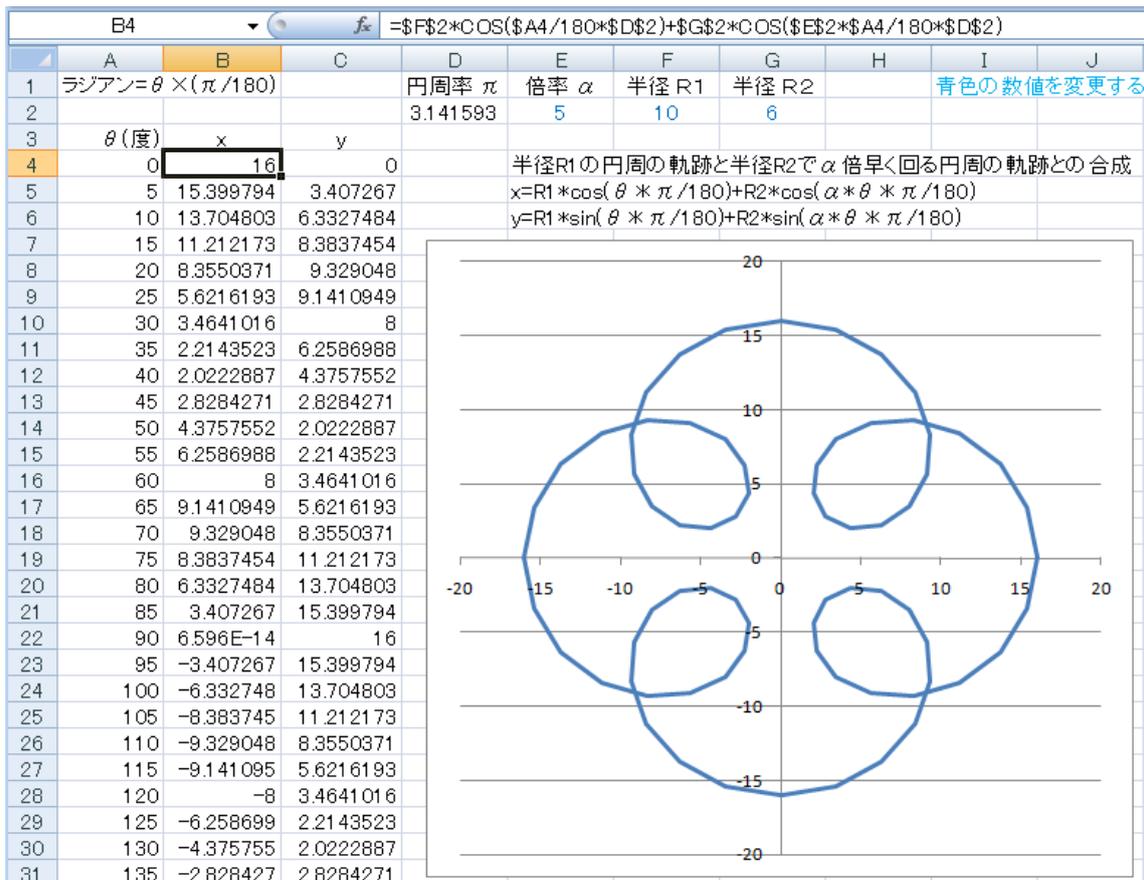


図7 スピログラフ

曲線を折線により近似して描画する例を幾つか見てきたが、同じようにして直線によるグラフを描くこともできる。例として、半径Rの円周をN等分して得られるN個の頂点から間隔がkのものを選び直線で結ぶと、どのような図形が得られるのかを確かめてみよう。表計算ソフトの作図機能を用いた製図作業に親しみを感じてきたのではないだろうか。

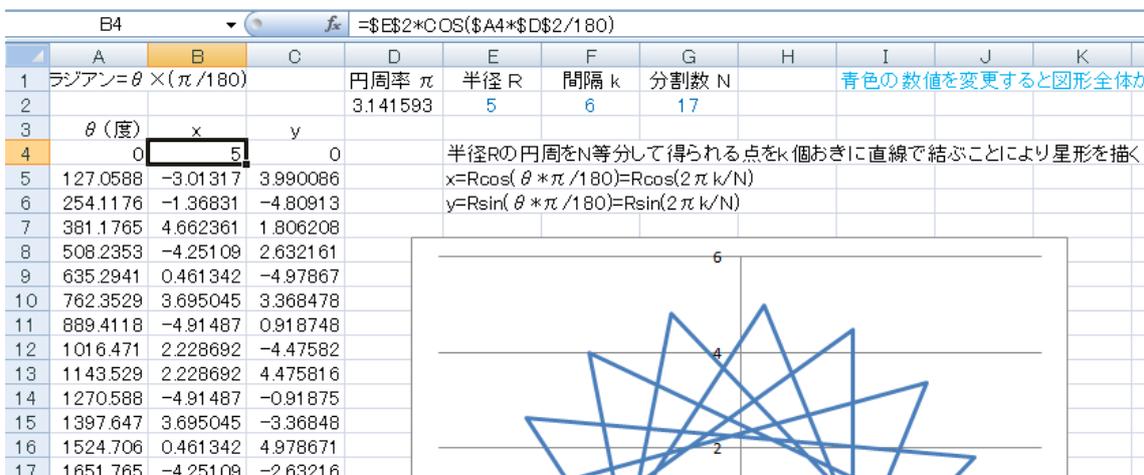


図8 多角形または星形の図形

2 基本的な座標変換と表計算ソフトについて

ここでは3次元CGの基本, 座標の回転操作と平行移動について理解しておこう. 先ず, 3次元座標における点(X,Y,Z)をx軸の周りで角度 α だけ回転操作して得られる点の座標(x, y, z)は, 行列 R_x とベクトルにより表すと, 次のように計算することができる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_x \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

同様にして, 3次元座標における点(X,Y,Z)をy軸の周りで β 回転操作して得られる点の座標(x, y, z)を, 行列 R_y を用いて次のように表すことができる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_y \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

さらに, 3次元座標における点(X,Y,Z)をz軸の周りで γ 回転操作して得られる点の座標(x, y, z)を, 行列 R_z を用いて次のように表すことができる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_z \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

これらの結果を用いると, 点(X,Y,Z)を最初はx軸の周りで α 回転し, 次にy軸の周りで β , 最後にz軸の周りで γ 回転操作して得られる点の座標(x, y, z)は次のように表すことができる. 勿論, 3個の行列をひとまとめにしてひとつの行列により表すこともできる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_z R_y R_x \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

同様にして, 3次元座標における点(X, Y, Z)を最初はz軸の周りで γ 回転し, 次にy軸の周りで β , 最後にx軸の周りで α 回転操作して得られる座標(x, y, z)を求めることができる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_x R_y R_z \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

ところで, 点(X, Y, Z)をx y z軸方向に(a, b, c)平行移動操作した点の座標(x, y, z)を次のように4次元の行列を用いて表すことができる(同次座標系における平行移動).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

この同次座標系を用いると, 3次元座標における点(X,Y,Z)をx軸の周りで α 回転操作して得られる点の座標(x, y, z)は次のようになる(同次座標系におけるx軸周りの回転).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

同様に、点(X, Y, Z)をy軸またはz軸の周りで角度βまたはγ回転操作して得られる点の座標(x, y, z)は次のようになる (同次座標系におけるyまたはz軸周りの回転)。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

これより、3次元座標における点(X, Y, Z)をx軸の周りで角度α回転操作した後にx y z軸方向に(a, b, c)平行移動操作して得られる点の座標(x, y, z)は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & b \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに、点(X, Y, Z)をy軸またはz軸の周りでβまたはγ回転操作した後に、任意の方向(d, e, f)または別の方向(p, q, r)へと平行移動操作した点の座標(x, y, z)は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & d \\ 0 & 1 & 0 & e \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & p \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

このような行列を用い、軸周りの回転操作とそれに続く平行移動とをひとまとめに表すことができる。ところで、各座標軸周りの回転操作をひとまとめに済ませてからx y z軸方向(a, b, c)に平行移動するようにすると、回転軸の順序により行列の成分(A11, ..., A33)の値は異なるが、一般に、以下のような形式で表すことができる。この場合、回転を表す成分は計算手順により変化するものの、平行移動を表す成分はそのままになる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 & a \\ A21 & A22 & A23 & b \\ A31 & A32 & A33 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

一方、点(X, Y, Z)をx y z軸方向(a, b, c)に平行移動操作してからx軸の周りで角度αだけ回転操作して得られる座標(x, y, z)は次のようになり、演算の順序により結果の異なることが分かる(非可換)。先の結果とは異なり、回転操作によって平行移動成分の値は変化する。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & (b\cos\alpha - c\sin\alpha) \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & (b\sin\alpha + c\cos\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

このような行列およびベクトルを用いた計算を表計算ソフト「エクセル」で行うのには、以降で示すような、絶対参照/相対参照/複合参照による計算式を用いると便利である。

C6		fx =COS(\$A\$3*PI()/180)														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		行列(Rx,Ry,Rz)の定義														
2		α					β						γ			
3		0					0						0			
4																
5			1	0	0			1	0	0				1	0	0
6	Rx:=		0	1	0		Ry:=	0	1	0		Rz:=	0	1	0	
7			0	0	1			0	0	1			0	0	1	

図9 行列(Rx, Ry, Rz)を定義する

例として、3次元の回転操作を表す行列(Rx, Ry, Rz)を取り上げる。ワークシート上で、行列 Rx の(1,1)成分を値1に、(1,2)成分と(1,3)成分そして(2,1)成分は値0に設定する。さらに(2,2)成分と(2,3)成分を式「=COS(\$A\$3*PI()/180), =-SIN(\$A\$3*PI()/180)」, (3,1)成分は値0に、(3,2)成分と(3,3)成分を式「=SIN(\$A\$3*PI()/180), =COS(\$A\$3*PI()/180)」により設定する(図9)。式中の絶対参照セル「\$A\$3」は、x軸周りの回転角 α を工学単位により表している。工学単位による角度は、理学単位に基づき三角関数(COS, SIN)を計算していることから、係数($\pi/180$)倍する。行列 Ry と Rz についても同様にして設定する。

B12		fx =B5*H\$5+\$C5*H\$6+\$D5*H\$7														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		行列(Rx,Ry,Rz)の定義														
2		α					β						γ			
3		45					45						45			
4																
5			1	0	0			0.7071	0	0.7071				0.7071	-0.707	0
6	Rx:=		0	0.7071	-0.707		Ry:=	0	1	0		Rz:=	0.7071	0.7071	0	
7			0	0.7071	0.7071			-0.707	0	0.7071				0	0	1
8																
9																
10		行列と行列の積														
11																
12			0.7071	0	0.7071			0.7071	0.5	0.5				0.5	-0.146	0.8536
13	RxRy:=		0.5	0.7071	-0.5		RyRx:=	0	0.7071	-0.707		RzRyRx:=	0.5	0.8536	-0.146	
14			-0.5	0.7071	0.5			-0.707	0.5	0.5				-0.707	0.5	0.5

図10 行列の積(RxRy, RyRx, RzRyRx)を計算する

複合参照による式「=B5*H\$5+\$C5*H\$6+\$D5*H\$7」により、行列の積(RxRy)の(1,1)成分をセル「B12」上に求める。次に、このセル「B12」に求めた(1,1)成分を、残る8成分に対応したセルへとコピーし行列の積(RxRy)を得る。同様に、行列の積(RyRx)の(1,1)成分を式「=H5*B\$5+I5*B\$6+J5*B\$7」によりセル「H12」に、行列の積(RzRyRx)の(1,1)成分を式「=N5*H\$12+O5*H\$13+P5*H\$14」によりセル「N12」に求め、これらに対応する残りのセルにコピーして、行列の積を得る。ここで示した例では、座標軸周りの回転角度 α , β , γ いずれも45度になっている(図10)。このような表計算の機能を用いると、行列とベクトルの積や内積も簡単に計算できることを注記しておく。

3 平行投影を用いた簡単な 3D-CG について

3次元空間における対象物(3Dオブジェクト)を2次元平面上に線画として描くには、3D-2D変換が必要となる。ここでは簡単のため、3Dオブジェクトへの回転操作のみを考え、2D変換には平行光線による投影(平行投影)を用いることにする。ところで、投影面の定義は2軸で済むが、3D空間での扱いは3軸を必要とすることを注記しておく。

平行投影では、3D空間中のオブジェクト(対象物)を平行投影する平面である投影面を、原点とx軸およびy軸に対応する2本の3D単位ベクトルにより定義する。次に、3Dオブジェクト上の点を表す3D座標を3Dベクトルとして扱い、この3Dベクトルと2本の3D単位ベクトルそれぞれとの内積を求め、この値を投影面上の2D座標とする。

このように3D-2D変換には、(1)回転操作を3Dオブジェクト上の点である3D座標(3Dベクトル)に適用してから、得られた3Dベクトルと2本の3D基本ベクトル(例えば \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2) との内積を計算するか、(2)回転操作を2本の3D単位ベクトルに適用してから、3Dオブジェクト上の点でもある3Dベクトルとの内積を計算することにより2D座標を求める方法がある(右手座標系もしくは左手座標系に対応させることができる)。

ここでは簡単のため、視点の移動と向きの変更に対応する、(2)2本の3D単位ベクトルに座標変換を適用する方法を用いることにする。なお、3Dオブジェクト上の点をベクトルで表す際の基準点を平行移動することで、平行移動操作を行うことができる。これらことから、同次座標系ではなく通常の座標系を用いた作図手順を示すことにする。

例としてx軸およびy軸に相当する、3D基本ベクトル \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 を選ぶことにする。

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これら2本の基本ベクトルに回転操作を加えることにより、投影面を定義する2本の3D単位ベクトル \mathbf{u}_1 と \mathbf{u}_2 を得ることができる。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix}$$

3Dオブジェクト上の各点を表すベクトルとこれら単位ベクトルとの内積を順次求めることにより、投影面上の2D座標が決まることから、3Dオブジェクト上の各点の連結関係に従って、線画(ワイヤーフレーム)として投影面に3D対象物を描くことができる。

以下に表計算ソフト「エクセル」を用いた上記の3D-2D変換および描画の例を示す。ここでは、3次元空間における対象物として螺旋状に巻かれた針金のようなものを取り上げることにする。例として、3D対象物上の座標を以下のようにして与えている。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |1 + \sin(\theta/k)| R \cos(\theta) \\ |1 + \sin(\theta/k)| R \sin(\theta) \\ s\theta \end{bmatrix}$$

螺旋形1個であれば一筆書きにより描画できることから、エクセルの散布図による描画機能を用い、3D-CGの雰囲気をも十分に味わうことができる。以下に作業手順の例を示す。

B5												
=ABS(1+SIN(\$A5*\$D\$2/180/\$J\$2))*E\$2*COS(\$A5*\$D\$2/180)												
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1	ラジアン=θ × (π/180)	π	R	s	α(z軸回転)	β(y軸回転)	γ(x軸回転)	変化率k				
2		3.141593	10	0.03	0	0	0	26				
3	角度	3次元空間での座標			2次元平面での座標						1	
4	θ(度)	x= 1+sin(θ/k) Rcosθ	y= 1+sin(θ/k) Rsinθ	z=sθ	X	Y					0	
5	0	10	0	0	10	0					0	
6	10	9.914185	1.748138	0.3	9.914185	1.748138						
7	20	9.523082	3.466118	0.6	9.523082	3.466118						
8	30	8.834646	5.100685	0.9	8.834646	5.100685						
9	40	7.866112	6.600452	1.2	7.866112	6.600452						
10	50	6.643581	7.917511	1.5	6.643581	7.917511						
11	60	5.20133	9.008967	1.8	5.20133	9.008967						
12	70	3.580856	9.838322	2.1	3.580856	9.838322						
13	80	1.82969	10.37669	2.4	1.82969	10.37669						
14	90	1.71E-14	10.60378	2.7	1.71E-14	10.60378						
15	100	-1.85296	10.50866	3	-1.85296	10.50866						
16	110	-3.67252	10.09017	3.3	-3.67252	10.09017						
17	120	-5.40233	9.357115	3.6	-5.40233	9.357115						
18	130	-6.9881	8.328096	3.9	-6.9881	8.328096						
									x= 1+sin(θ/k) Rcosθ			
									y= 1+sin(θ/k) Rsinθ			
									z=sθ			

図 1 1 3Dオブジェクトの座標計算

セル「A 5」には開始角度0を与えておく。そして、セル「A 6」には計算式「=A 5 + 1 0」を入力し、自動計算により値が1 0 0 0程度になるよう下向きにドラッグする。セル「B 5」ではx座標値 $|1 + \sin(\theta/k)| R \cos \theta$ を計算する。角度θはセル「\$ A 5」に与えられており、この例では0度(工学単位)となっているので、セル「\$ D \$ 2」の円周率(1 8 0度に相当)を用いて理学単位に直している。そして、何回転で元に戻るかを表す変数「k」を変化率としセル「\$ J \$ 2」に指定する。この例では2 6となる。半径Rはセル「\$ E \$ 2」に指定する。同様にセル「C 5」ではy座標値 $|1 + \sin(\theta/k)| R \sin \theta$ を計算している。セル「D 5」では工学単位による角度とスケール因子sを用い式「=\$A5*\$F\$2」によりz座標値の値sθを計算するようにしている。

計算できていることを確認したら、3D座標「セルB 5からD 5まで」を選び、下にドラッグしてコピーすることで作図に必要な範囲に関する自動計算を行うようにする。これまでの操作により、3Dオブジェクトの座標を全て得ることができる。次は2本の3D基本ベクトル e_1 と e_2 をセル「V 7~V 9」とセル「V 1 2~V 1 3」に設定しておく。

U4													
=COS(\$D\$2*\$I\$2/180)													
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	γ(x軸回転)	変化率k											
2	0	26											
3			Rz				Ry			Rx			
4			1	0	0		1	0	0		1	0	0
5			0	1	0		0	1	0		0	1	0
6			0	0	1		0	0	1		0	0	1
7													
8	横軸: u1=	1				1			1				1
9		0	<=Rz(Ry(Rxe1))			0	<=Ry(Rxe1)		0	<=Rxe1			0
10		0				0			0				0
11													
12	縦軸: u2=	0				0			0				0
13		1	<=Rz(Ry(Rxe2))			1	<=Ry(Rxe2)		1	<=Rxe2			1
14		0				0			0				0

図 1 2 2本の3D基本ベクトル e_1 と e_2

基本ベクトル e_1 と e_2 を行列 R_x によりx軸の周りでγ度回転させる。行列 R_x の成分はセル「T 3~V 6」に設定する。行列 R_x の2行2列目の成分は式「=COS(\$D\$2*\$I\$2/180)」

により計算する。ただし、セル「\$ I \$ 2」は回転角度 γ である。同様にして行列 R_x の 2 行 3 列目の成分 ($=\text{SIN}(\$D\$2*\$I\$2/180)$)、3 行 2 列目の成分 ($=\text{SIN}(\$D\$2*\$I\$2/180)$)、そして 3 行 3 列目の成分 ($=\text{COS}(\$D\$2*\$I\$2/180)$) も計算するようにしておく。

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1									
2			Ry				Rx		
3		1	0	0		1	0	0	
4		0	1	0		0	1	0	
5		0	0	1		0	0	1	
6									
7				$=\$T\$3*\$V\$7+\$U\$3*\$V\$8+\$V\$3*\$V\9				1	
8		$\langle=Ry(Rxe1)$		0	$\langle=Rxe1$			0	$\langle=e1$
9				0				0	
10									
11									
12				0				0	
13		$\langle=Ry(Rxe2)$		1	$\langle=Rxe2$			1	$\langle=e2$
14				0				0	

図 1 3 行列と基本ベクトルとの積を計算する

次に行列(R_x)と 2 本の基本ベクトル(e_1, e_2)との積を求める。ベクトル(R_x) e_1 の x 成分「 $=\$T\$3*\$V\$7+\$U\$3*\$V\$8+\$V\$3*\$V\9 」、y 成分「 $=\$T\$4*\$V\$7+\$U\$4*\$V\$8+\$V\$4*\$V\9 」、z 成分「 $=\$T\$5*\$V\$7+\$U\$5*\$V\$8+\$V\$5*\$V\9 」を計算する。同様にして(R_x) e_2 の x y z 成分「 $=\$T\$3*\$V\$12+\$U\$3*\$V\$13+\$V\$3*\$V\14 」, $=\$T\$4*\$V\$12+\$U\$4*\$V\$13+\$V\$4*\$V\14 , $=\$T\$5*\$V\$12+\$U\$5*\$V\$13+\$V\$5*\$V\14 」も計算しておく。行列とベクトルの積を求めるため、ベクトル成分 3 個についての計算式をセルの絶対参照を用い書き表している。

先に示したように、成分ひとつだけを式により計算し、残りは自動計算により求めることもできる。例えば、ベクトル(R_x) e_1 の x 成分を式「 $=\$T\$3*\$V\$7+\$U\$3*\$V\$8+\$V\$3*\$V\9 」により与え、残る y 成分と z 成分はこの計算式をコピーして済ませることもできる。同様に (R_x) e_2 の x 成分を複合参照による式「 $=\$T\$3*\$V\$12+\$U\$3*\$V\$13+\$V\$3*\$V\14 」により計算するようにし、残り 2 個の y z 成分はコピーによる自動計算で済ませることができる。

ところで、ベクトル成分の計算式を全て相対参照により書き表すこともできる。この場合、例えばベクトル(R_x) e_1 の各成分「 $=T3*V7+U3*V8+V3*V9$ 」, $=T4*V7+U4*V8+V4*V9$, $=T5*V7+U5*V8+V5*V9$ 」の計算式は随分とすっきりした感じになる。しかし、行列やベクトルを用いた計算をこのような相対参照だけによる計算式で行おうとすると、この式をコピーするだけではなく、正しい式へと書き換えるための手間が必要になる。

SUM										
=L\$3*N\$7+M\$3*N\$8+N\$3*N\$9										
	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	α (z軸回転)	β (y軸回転)	γ (x軸回転)	変化率k						
2	0	0	0	26						
3										
4						1	0	0		1
5						0	1	0		0
6						0	0	1		0
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										

図 1 4 投影面上の単位ベクトル u_1 と u_2 を求める

基本ベクトル e_1 および e_2 と回転操作に対応する行列(R_x, R_y, R_z)との積を順次求めることにより、投影面上の単位ベクトル u_1 および u_2 を計算した。上に示した例では、回転角度が全てゼロであることから $u_1 = e_1$ および $u_2 = e_2$ となっている。正しく計算できていることを確かめるには、例えば、各回転角度として 45(度)とか 90(度)さらには 180(度)などの値を入力し、行列(R_x, R_y, R_z)の各成分や基本ベクトル e_1 および e_2 との積がどうなるのかを見ると良いであろう。これで 3D-2D変換の準備が整ったことになる。

3D対象物上の点を表す 3Dベクトルと、投影面を表す基本ベクトル(u_1, u_2)との内積は、投影面上の 2D座標に対応する。したがって、このような 3D-2D変換を順次行い、得られた 2D座標を使い作図機能を用いて、平行投影による図を描画することができる。

SUM										
=B5*\$J\$7+\$C5*\$J\$8+\$D5*\$J\$9										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ラジアン= $\theta \times (\pi / 180)$			π	R	s	α (z軸回転)	β (y軸回転)	γ (x軸回転)	変化率k
2				3.141593	10	0.03	0	0	0	26
3	角度	3次元空間での座標			2次元平面での座標					
4	θ (度)	$x=1+\sin(\theta)$	$y=1+\sin(\theta)$	$z=s\theta$	X	Y				
5	0	10	0	0						
6	10	9.914185	1.748138	0.3	9.914185	1.748138				
7	20	9.523082	3.466118	0.6	9.523082	3.466118				
8	30	8.834646	5.100685	0.9	8.834646	5.100685				
9	40	7.866112	6.600452	1.2	7.866112	6.600452				
10	50	6.643581	7.917511	1.5	6.643581	7.917511				
11	60	5.20133	9.008967	1.8	5.20133	9.008967				
12	70	3.580856	9.838322	2.1	3.580856	9.838322				
13	80	1.82969	10.37669	2.4	1.82969	10.37669				
14	90	1.71E-14	10.60378	2.7	1.71E-14	10.60378				
15	100	-1.85296	10.50866	3	-1.85296	10.50866				
16	110	-3.67252	10.09017	3.3	-3.67252	10.09017				
17	120	-5.40233	9.357115	3.6	-5.40233	9.357115				
18	130	-6.9881	8.328096	3.9	-6.9881	8.328096				

図 1 5 基本ベクトルと 3D対象物上の点を表すベクトルとの内積

上に示した例では、3D空間中の点を表すセル「B 5 ~ D 5」と基本ベクトル u_2 を表す

セル「J 7～J 9」を用い、2D平面上でのx座標に相当するセル「E 5」をベクトルの内積を表す計算式「 $=\$B5*\$J\$7+\$C5*\$J\$8+\$D5*\$J\$9$ 」により求めている。y座標に相当するセル「F 5」は式「 $=\$B5*\$J\$12+\$C5*\$J\$13+\$D5*\$J\$14$ 」により計算している。計算式を、投影面上の単位ベクトル \mathbf{u}_1 および \mathbf{u}_2 を絶対参照で、3D対象物上の点を表すベクトルを絶対参照と相対参照を交えた複合参照で書き表している。また3Dベクトルは全て相対参照することもできる。しかし、複合参照により、セルの再利用は容易になる。

角度 θ は10度刻みで与えることにする。先に述べた式により、3D対象物上の点をベクトルとして列「B～D」に自動計算により求める。平行投影に基づく3D-2D変換により、列「E～F」に3D投影面上の2D座標値を求めておく。こうして得られた2D座標値を選択し、散布図として3D対象物の平行投影図を描くことができる(図16)。

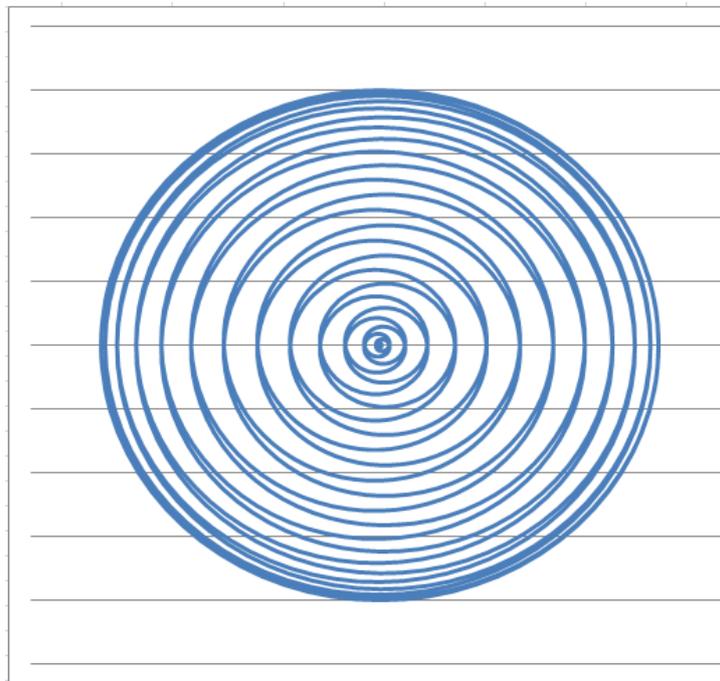


図16 上から見た半径の変化する回転螺旋形($\alpha = \beta = \gamma = 0$)

この3D対象物はz軸周りで半径を変えながら回転させている螺旋形なので、試しにスケール因子 $s = 0.03$ と $s = 0.02$ について、x軸周りに+10度y軸周りに-10度回転させてみることにする。これは、投影面をx軸周りに-10度y軸周りに+10度回転させたことに相当する。これは、ここで示した3D-2D変換に左手座標系を用いていることを意味している。この例では、主な計算は3Dベクトルの内積になっており、従って計算機への負荷の軽い計算量の少ない手法になっている(図15)。

右手座標系を用いて作図するためには、3D対象物上の全ての点を表す3Dベクトルに対し行列(R_x, R_y, R_z)を用いた回転処理を行う必要がある。そのためには、計算量を減らすべく回転操作を表す3個の行列の積を予め求めておき、こうして得られた行列により3D

ベクトルの回転操作をまとめて行い、その後、投影面上の2本の基本ベクトル（または単位ベクトル）との内積を計算することにより3D→2D変換する。それでも、主な計算が行列と3Dベクトルの積および3Dベクトルの内積になるので、負荷は少し重くなる。

右手座標系か左手座標系のどちらを用いるかの選択は自由であるが、このような工夫をするかしないかにより3D→2D変換のための計算量は大幅に異なってくる。

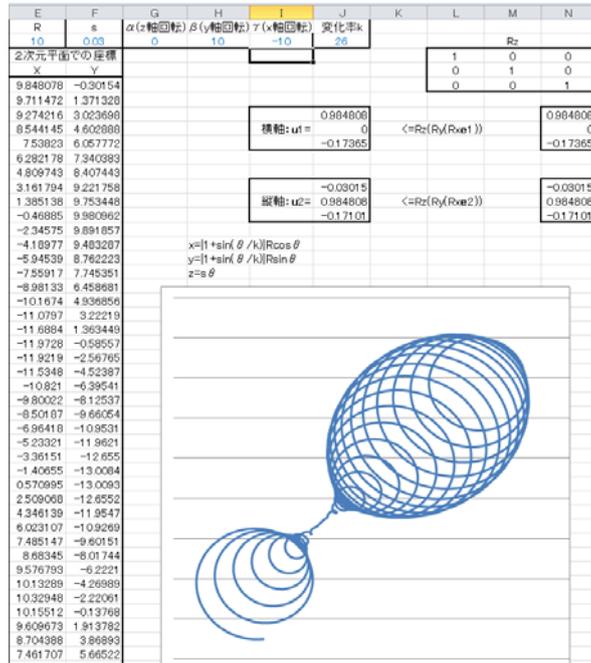


図 1.7 a 回転操作により少し傾けた3D対象物($\alpha=0, \beta=10, \gamma=-10, s=0.03$)

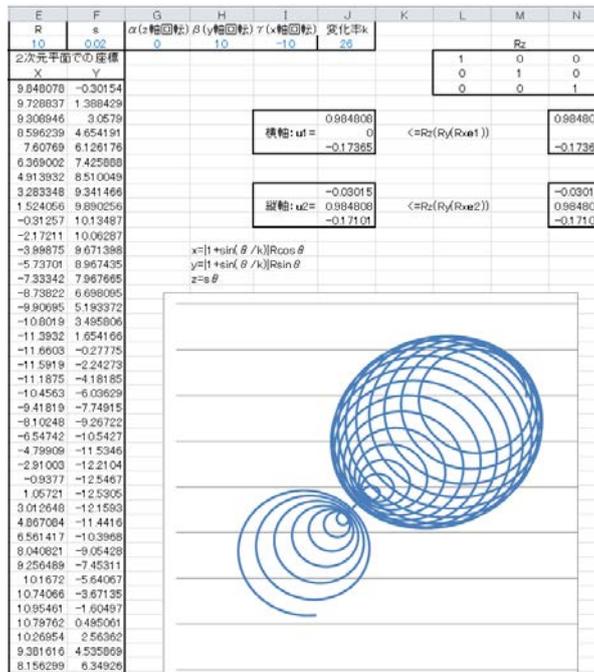


図 1.7 b 回転操作により少し傾けた3D対象物($\alpha=0, \beta=10, \gamma=-10, s=0.02$)

対象物が 1 個の場合について、平行投影を用いた 3D-2D 変換により、表計算ソフトによる作図機能を用いたコンピュータグラフィックスの例を見てきた。このような作図処理は、今日良く用いられている CG の基盤技術を構成している。そして、一般的な表計算ソフトによりこのような背景となる処理を具体例により体験することを通して、3DCG をより身近に感じることができるものと考えている。

4 マクロを用いた作図について

ここで試した計算処理は、見かけ上並列に行われていること、そして回転角度などのデータを入力すると同時にこの値を用いた計算処理が流れるように（データフロー形式で）行われたことに気付いたであろうか。CG のための多くの処理は並列化が容易になっており、しかも大部分はデータ入力されると即実行できるのが特徴と言える。このデータ入力に関して、各種入力装置やファイルなどを自由に使えるようにすると便利である。

データが揃えば実行されるデータフロー形式による処理の簡単な例として、マウスとキーボードおよび時計を用いるものを紹介しておく。表計算ソフト「EXCEL」のマクロ機能によりワークシート中に時間を表示し、この表示内容中の秒を用いた計算式により各種変数を 1 秒毎に計算し、表示されている図を秒単位で変化させるものである。

マクロには、例として以下のものを用いることにする。マクロの名称「DigitalClock」にあるように、ワークシート「3D螺旋」中のセル「Q1」にデジタル形式「hh:mm:ss」により時間表示をする。変数「TimeValue("00:00:00")」は標準時変更用のオフセットでもあるので省略しても構わない。特定のセル「例としてS1」に秒の値（0～59）だけを取り出す式「=SECOND(Q1)」を書いておくと利用し易くなる。マクロの作成・編集・実行は開発タブからマクロを選んで行う。マクロの動作や停止などの制御をマクロ編集画面からも行えるが、秒の値の表示されているセルを選び、直接に式を書き換え変更したり消去することにより行うのが簡単かもしれない。

```
Sub DigitalClock()
    With Sheets("3D螺旋").Range("Q1")
        .Value = Time
        .NumberFormatLocal = "hh:mm:ss"
    End With
    Application.OnTime Now + TimeValue("00:00:00"), "DigitalClock"
End Sub
```

このマクロを実行することによりワークシート「3D螺旋」中のセル「Q1」にデジタル時計が表示される。他のワークシートからこれを参照し利用するには、式「='3D螺旋'!Q1」または「='3D螺旋'!S1」を用いると良い。秒値の表示されているセル「例えばT1」を用い、回転角度であれば計算式「例えば=T1*6」などを使うと、データフロー形式の描画システムを操作しているかのようにして、簡単ではあるが動くCGを試すことができる。

5 複数の線を用いた描画について

散布図を用いて複数の対象物を描くこともできる。簡単な例として、直方体1個を4組の四辺形により描いたものを示す。例では、斜め右上向きがx軸，斜め左上向きがy軸，上向きがz軸になるように表示している。結果（図18）は、頂点を原点に置いた立方体を、x軸周りで30度，y軸周りで15度回転させたものを平行投影により描いている。

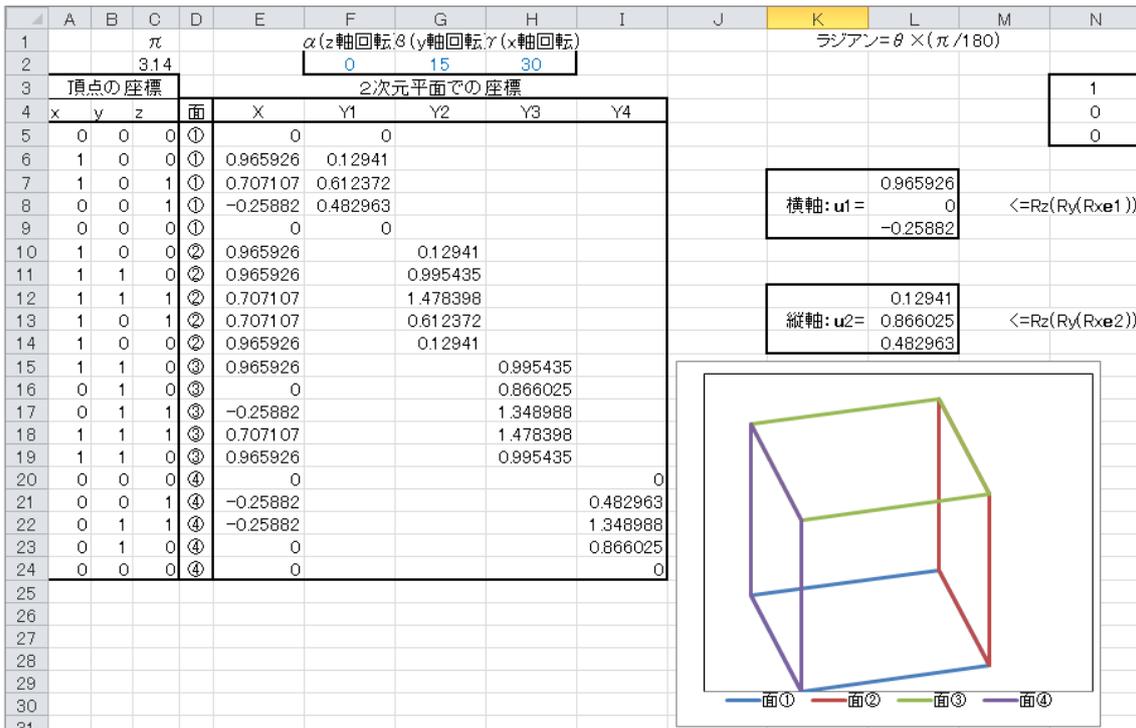


図18 散布図により直方体を描く

立方体らしいものを構成するため、面①から始めて面④の順に描いているので、最初に描いた辺は後から描く辺により重ね書きされることになる。面④を最後に描くことから、この正方形の全ての辺が同じ色の線で描かれていることを確認することができる。

表計算ソフトによる作図なので、この立方体を構成している4面のデータを表すため、1面毎にセル1列分を用いている。多数の面から成る複雑な対象物を描こうとすると、ワークシートの幅はその数だけ増えて行くことから、修正作業などは煩雑になる。一方、描画用ソフトウェアは、データ表現と管理および加工や再利用などの利便性に配慮している。

なお、CGでは表示範囲などを定義するためにビューポート指定をするのが一般的である。しかし、標準設定（軸のオプション=自動）では全範囲を表示するようになっているため、表示する対象物の向きなどにより軸の比率が変わることになる。これに対し、軸のオプションを固定に変えると、最小値および最大値などを適切に設定する必要があるものの、ビューポート指定した様な結果が得られることを注記しておく（グラフィックツール>レイアウト>軸->主横軸などと辿りオプション設定をする）。

6 透視投影を用いた簡単な作図について

視点(point of view ;POV)と注目点との2点により注目点を通る投影面を定義する。これより、3D空間中の視点と対象物上の座標点を通る直線が決まることから、この直線と投影面との交点すなわち平面上の座標が得られる。この透視変換により、3D-2D変換を実行すると、遠近感のある図を作成することができる。以下にその手順の例を示す。

簡単のため、x軸上に視点(d+D,0,0)と注目点(D,0,0)を置くことにする。これはyz平面に平行な投影面(注目点はx軸上)を原点から距離D離れた位置に設定し、x軸上の視点(観測者)はこの投影面から距離dだけ離れていることを意味している(図19)。

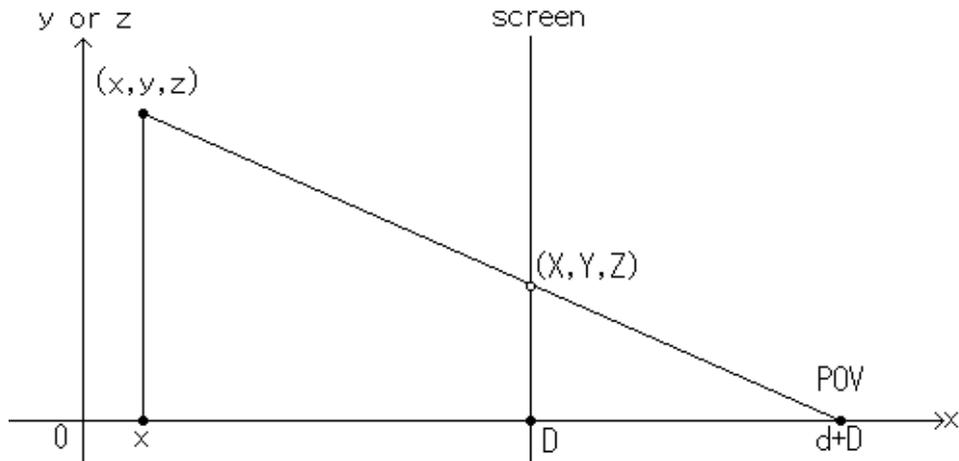


図19 透視投影による座標の求め方

三角形の相似から、3D対象物上の点(x,y,z)と視点を結ぶ直線と投影面との交点(X,Y,Z)は簡単な計算により求めることができ、これらからyz平面上の2D座標(Y,Z)を得る。

$$X=D, \quad Y=y*d/(d+D-x), \quad Z=z*d/(d+D-x),$$

透視投影を用いたこの3D-2D変換では、まず視点(d+D,0,0)と注目点(D,0,0)とによりyz平面に平行な投影面を定義している。次に、3D回転行列の積 $R_zR_yR_x$ を計算し、この行列を用いて回転操作をした対象物の3D座標点を求める。最後に、こうして得られた3D座標点のyz座標成分から2D座標(Y,Z)を求める。以下にその手順を示す。

座標軸周りの回転を表す行列の積を順次求める。行列(R_y)(R_x)の各成分は次のようになる。

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	
1													
2													
3			Rz				Ry				Rx		
4			0.866	-0.5	0		1	0	0		1	0	0
5			0.5	0.866	0		0	1	0		0	1	0
6			0	0	1		0	0	1		0	0	1
7													
8			Rz(RyRx)				RyRx						
9			0.866	-0.5	0		1	0	0				
10			0.5	0.866	0		0	1	0				
11			0	0	1		0	0	1				

図20 回転操作を表す行列(R_y)(R_x)を計算

式「 $=\$S3*W3+\$T3*W4+\$U3*W5$, . . . , $=\$S5*W3+\$T5*W4+\$U5*W5$ 」により行列の 1 行 1 列から 3 行 1 列までの成分を計算する. 同様にして, 1 行 2 列から 3 行 3 列までを式「 $=\$S3*X3+\$T3*X4+\$U3*X5$, . . . , $=\$S5*Y3+\$T5*Y4+\$U5*Y5$ 」により得る.

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1												
2		Rz				Ry				Rx		
3		0.866	-0.5	0		1	0	0		1	0	0
4		0.5	0.866	0		0	1	0		0	1	0
5		0	0	1		0	0	1		0	0	1
6												
7		Rz(RyRx)				RyRx						
8		0.866	-0.5	0		1	0	0				
9		0.5	0.866	0		0	1	0				
10		0	0	1		0	0	1				

図 2 1 回転操作を表す行列(Rz)(Ry)(Rx)を計算

次に, 式「 $=\$O3*S8+\$P3*S9+\$Q3*S10$, . . . , $=\$O5*U8+\$P5*U9+\$Q5*U10$ 」により, 回転操作に用いる行列(Rz)(Ry)(Rx)の 1 行 1 列から 3 行 3 列までの成分を得る (図 1 9).

こうして得られた行列(Rz)(Ry)(Rx)を用い, 対象物の 3 D座標 (xp, yp, zp) から回転操作後の 3 D座標 (x, y, z) を計算する. x 座標「E 5」を式「 $=\$O8*A5+\$P8*B5+\$Q8*C5+\$J2$ 」により計算する. 同様に, y 座標と z 座標の値を式「 $=\$O9*A5+\$P9*B5+\$Q9*C5+\$K2$ 」と「 $=\$O10*A5+\$P10*B5+\$Q10*C5+\$L2$ 」により計算する (図 2 2 . . . X, Y1, Y2, Y3, Y4).

ただし式の中にある最後の項目, セル「 $\$J2$ 」は x 軸方向, セル「 $\$K2$ 」は y 軸方向, セル「 $\$L2$ 」は z 軸方向に関する平行移動を表している.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	R		π		α (z軸周)	β (y軸周)	γ (x軸周)	D	d	a(x軸)	b(y軸)	c(z軸)					
2			3.14		30	0	0	2	3	0	0	0					
3	頂点の座標																
4	xp	yp	zp	面	x	y	z	X	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5				
5	-1	-1	-1	①	-0.366	-1.366	-1	-0.764	-0.559								
6	1	-1	-1	①	1.36603	-0.366	-1	-0.302	-0.826								
7	1	-1	1	①	1.36603	-0.366	1	-0.302	0.8255								
8	-1	-1	1	①	-0.366	-1.366	1	-0.764	0.5591								
9	-1	-1	-1	①	-0.366	-1.366	-1	-0.764	-0.559								
10	1	-1	-1	②	1.36603	-0.366	-1	-0.302		-0.826							
11	1	1	-1	②	0.36603	1.36603	-1	0.8844		-0.647							
12	1	1	1	②	0.36603	1.36603	1	0.8844		0.6474							
13	1	-1	1	②	1.36603	-0.366	1	-0.302		0.8255							
14	1	-1	-1	②	1.36603	-0.366	-1	-0.302		-0.826							
15	1	1	-1	③	0.36603	1.36603	-1	0.8844			-0.647						
16	-1	1	-1	③	-1.366	0.36603	-1	0.1725		-0.471							
17	-1	1	1	③	-1.366	0.36603	1	0.1725		0.4713							
18	1	1	1	③	0.36603	1.36603	1	0.8844		0.6474							
19	1	1	-1	③	0.36603	1.36603	-1	0.8844		-0.647							
20	-1	-1	-1	④	-0.366	-1.366	-1	-0.764				-0.559					
21	-1	-1	1	④	-0.366	-1.366	1	-0.764				0.5591					
22	-1	1	1	④	-1.366	0.36603	1	0.1725				0.4713					
23	-1	1	-1	④	-1.366	0.36603	-1	0.1725				-0.471					
24	-1	-1	-1	④	-0.366	-1.366	-1	-0.764				-0.559					
25	1	0	1	⑤	0.86603	0.5	1	0.3628					0.7257				

図 2 2 回転操作をした 3 D座標の計算

先に触れたように、行列の各成分の計算については、(1,1)成分の計算式をコピーすることで残り8成分が求まるよう、絶対参照と相対参照表記とを混在させている。相対参照のみによると、同じ結果は得られるものの、かなり非効率になることを注意しておく。

このような3D-2D変換処理により、作図することができる。3D対象物の例として辺の長さが2の立方体を選び、中心を原点に、各辺を座標軸と平行になるように置き、注目点($D=2,0,0$)と注視点($d=3,0,0$)を決め、透視投影をする。回転操作の例として、x軸周りで30度回転させたものを示す。なお、12角形を追加し、軸の書式設定メニュー「軸のオプション、線の色」などから座標軸や目盛などを描かないように設定している(図21)。

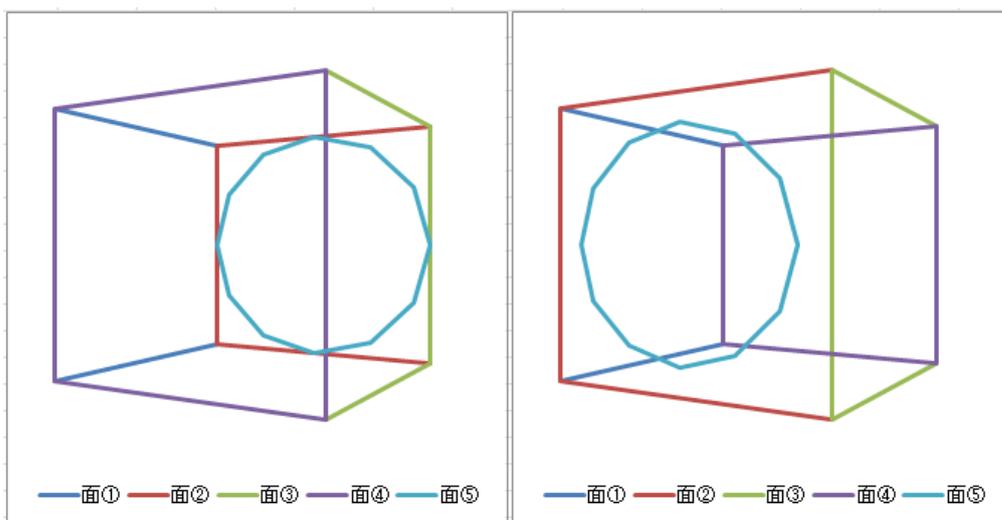


図23 立方体を平行移動または回転操作して透視投影

7 レポート課題

指示された課題に従った内容のレポートを作成し提出してください。
提出する課題としては以下のようなものを予定している。

- (1) 座標が簡単な式により与えられる2D図形を描き解説せよ。
- (2) 座標が簡単な式により与えられる3D図形を描き解説せよ。

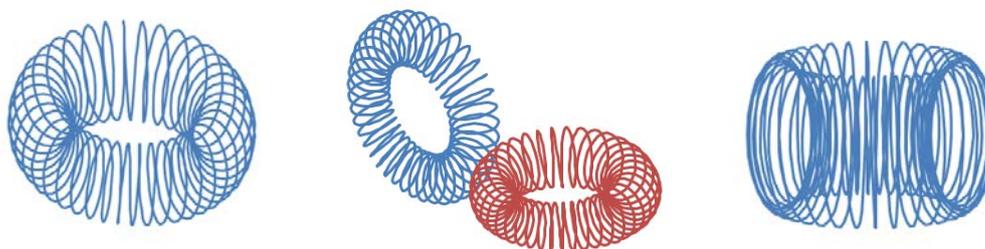


図24 各種図形

メモ：この資料は商業目的外なら自由に利用することができる。

関連の資料が <http://cafe.mis.ous.ac.jp/sawami/> にて公開されている。