

時間 t を変数とする周期 T の 1 次元信号 $f(t)$ は以下のようなフーリエ級数展開により表すことができる。

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\}$$

ただし $\omega = \frac{2\pi}{T}$ は単位角周波数であり、フーリエ係数 a_0, a_k, b_k は次のようにして定義されている。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt \end{aligned}$$

このフーリエ級数展開で用いられている基底 $\{1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \cos 3\omega t, \sin 3\omega t, \dots\}$ は、以下に示すような関係を有していることから、直交基底とも呼ばれている (ただし $k \neq l$)。

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt &= T \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega t dt &= \left[\frac{1}{k\omega} \sin k\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 k\omega t dt &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos 2k\omega t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2k\omega} \sin 2k\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{T}{2} \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega t \cos l\omega t dt &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(k+l)\omega} \sin (k+l)\omega t + \frac{1}{(k-l)\omega} \sin (k-l)\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega t dt &= \left[\frac{-1}{k\omega} \cos k\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 k\omega t dt &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2k\omega} \sin 2k\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{T}{2} \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega t \sin l\omega t dt &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{(k+l)\omega} \sin (k+l)\omega t + \frac{1}{(k-l)\omega} \sin (k-l)\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega t \cos l\omega t dt &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{(k+l)\omega} \cos (k+l)\omega t - \frac{1}{(k-l)\omega} \cos (k-l)\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega t \cos k\omega t dt &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2k\omega} \cos 2k\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = 0 \end{aligned}$$

基底 $\exp(jk\omega t)$ と $\exp(-jl\omega t)$ も同様な直交関係を有している (ただし $j = \sqrt{-1}$)。

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(jk\omega t) \exp(-jk\omega t) dt &= T \\ \int_{-T/2}^{T/2} \exp(jk\omega t) \exp(-jl\omega t) dt &= \left[\frac{1}{j(k-l)\omega} \exp(j(k-l)\omega t) \right]_{-T/2}^{T/2} = 0 \end{aligned}$$

この複素直交基底 $\exp(jk\omega t)$ を用いると、以下のようなフーリエ級数展開が得られる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] \exp(jk\omega t) \\ &= F[0] + \sum_{k=1}^{\infty} (F[k] + F[-k]) \cos k\omega t + j(F[k] - F[-k]) \sin k\omega t \\ F[k] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jk\omega t) dt \end{aligned}$$

したがって、実フーリエ係数 (a_k, b_k) と複素フーリエ係数 $(F[k])$ の間には次の関係が成立する。これより、複素フーリエ係数の実部が偶対称そして虚部が奇対称の性質を有していることが分かる。

$$\begin{cases} F[k] = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \\ F[-k] = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \end{cases}$$

ところで、上記連続信号 $f(t)$ を時間間隔 $\tau = \frac{T}{N}$ で標本化して得た離散信号 $f[n] = f(\frac{nT}{N})$ に対する離散フーリエ変換を、以下のように定義することができる。しかし、これをそのまま計算した場合の演算量は、フーリエ係数または信号 1 個につき $O(N)$ 回とかなり量になってしまう。

$$\begin{aligned} F[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right) \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ f[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad ; n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

離散化した基底 $\exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$ と $\exp\left(\frac{-j2\pi ln}{N}\right)$ に関する直交関係は以下のようなものである。

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right) \exp\left(\frac{-j2\pi ln}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \\ \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right) \exp\left(\frac{-j2\pi ln}{N}\right) = \frac{1 - \exp(j2\pi(k-l))}{1 - \exp\left(\frac{j2\pi(k-l)}{N}\right)} = 0, \quad k \neq l \end{cases}$$

離散フーリエ変換を用いると、信号空間で定義されるデータ $(f[n])$ の加工を周波数空間での意味を考慮しながら行うことができるので、広範な分野で多くの有用な結果を得ることができる。しかし変換長に比例して 1 点あたりの計算量が増加したのでは、その応用範囲も限られたものになってしまう。変換長が増加しても計算量がそれ程増えない高速算法の出現が望まれていた。

離散フーリエ変換の高速算法の発見 (J.W.Cooley, J.W.Tukey: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Mathematics of Computation, Vol.19 1965) により, 高度なデジタル信号処理の実現が容易となった。また, デジタル機器の性能向上に伴い, 離散フーリエ変換を応用した製品も身近なものになってきている。以降では, この離散フーリエ変換の高速算法 F F T (Fast Fourier Transform) に関する極めて簡単な解説を行っている。

境界と重なるように標本点を選んだ場合, 離散フーリエ変換は以下のように書くことができる。

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]W_N^{kn} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$W_N = \exp \frac{-j2\pi}{N} \quad , j = \sqrt{-1}$$

積の総和によるこの変換式をそのまま計算すると演算量は $O(N^2)$ となり, 標本点あたり $O(N)$ となることから, 変換長 N に比例して計算量が増加することになる。ところで標本数 N が 2 のべき乗の場合 ($N = 2^\nu$, ν は正の整数), 積の総和に関する信号成分 (f) の指標が偶数であるか奇数であるかによって分けることにより (信号間引き), 変換長が N の離散フーリエ変換を, 変換長が $N/2$ の離散フーリエ変換を組み合わせたものを書き直すことができる。

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n]W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n+1]W_N^{(2n+1)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n]W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n+1]W_{N/2}^{kn}$$

ここで $W_{N/2}^{(N/2+k)n} = W_{N/2}^{kn}$ であることに注意すると, 以下の関係式を得る。

$$F[N/2+k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n]W_{N/2}^{kn} + W_N^{N/2+k} \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n+1]W_{N/2}^{kn}$$

これらを偶数指標成分 $T[2k]$ と奇数指標成分 $T[2k+1]$ の重み付き和として表すことができる。

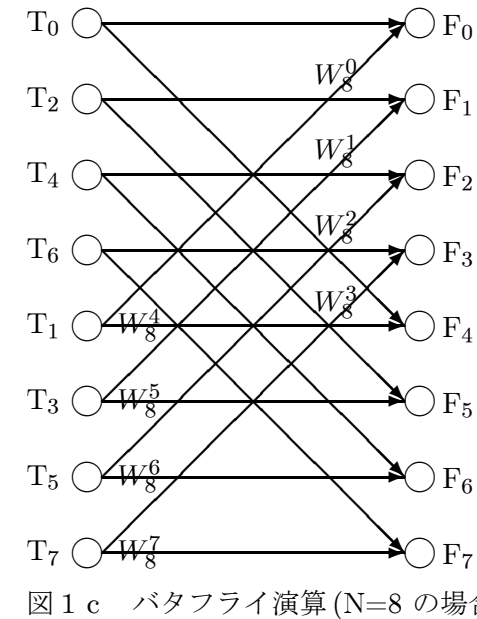
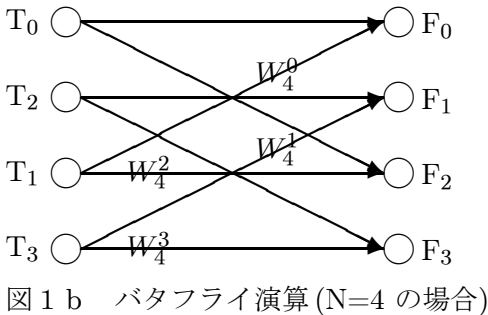
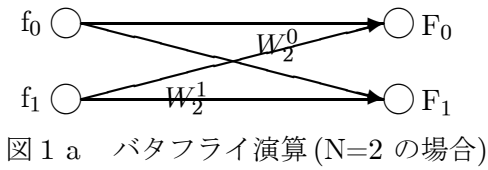
$$F[k] = T[2k] + W_N^k T[2k+1] \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

ただし

$$T[2k+N] = T[2k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n]W_{N/2}^{kn}$$

$$T[2k+1+N] = T[2k+1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n+1]W_{N/2}^{kn}$$

これより, 変換長が $N/2$ の離散フーリエ変換に相当する中間変数 $T[2k]$ と $T[2k+1]$ そして重み係数 W_N^k を用いた計算量が $O(N)$ のいわゆるバタフライ演算により, 変換長 N の離散フーリエ変換を実行できることが分かる。この計算手順を有向グラフとして表した例を図 1 に示す ($N = 2, 4, 8$ の場合)。ただし, $T_k = T[k]$ などとし, 表記のない矢印に対応する重みは 1 であるとしている。また, 奇数指標の中間変数にのみ重み係数 W_N^k のかかることを注記しておく。



このようにして離散フーリエ変換の変換長を順次半減させていけば、すべてをバタフライ演算(計 ν 段)に置き換えることができる。この場合の計算量は $O(N\nu) = O(N \log_2 N)$ となり、積の総和による計算量 $O(N^2)$ と比較し大幅に削減されていることになる。図 2 に積の総和すべてをバタフライ演算に置き換えたものを示す (N = 8 の場合)。ただし $W_N^0 = -W_N^{N/2} = 1$ なので、複素数の乗算をさらに半減することができる(図 3,4 参照)。ところで、積の総和による演算

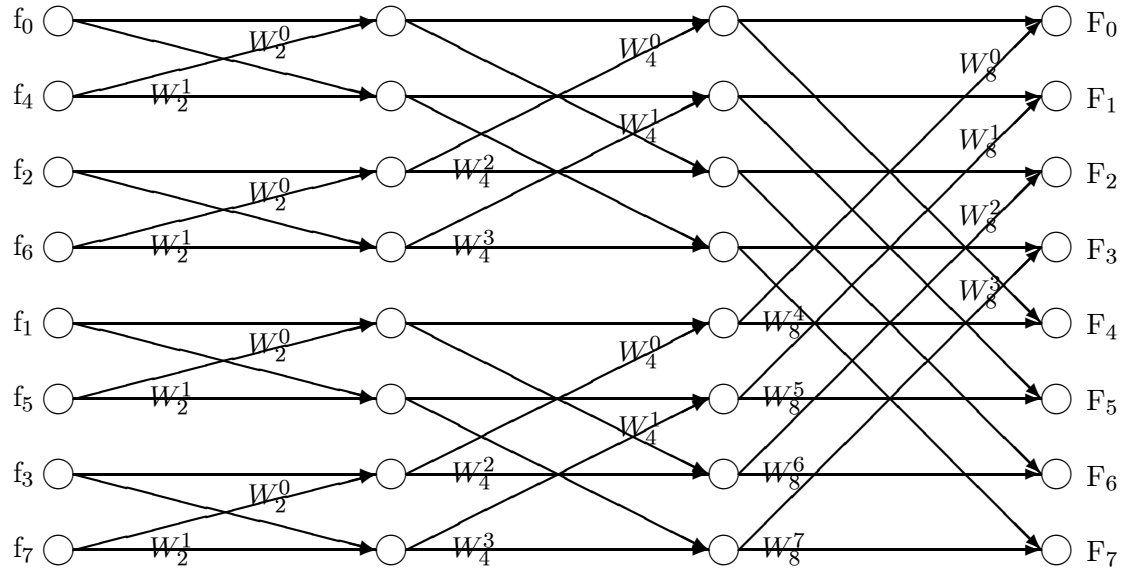
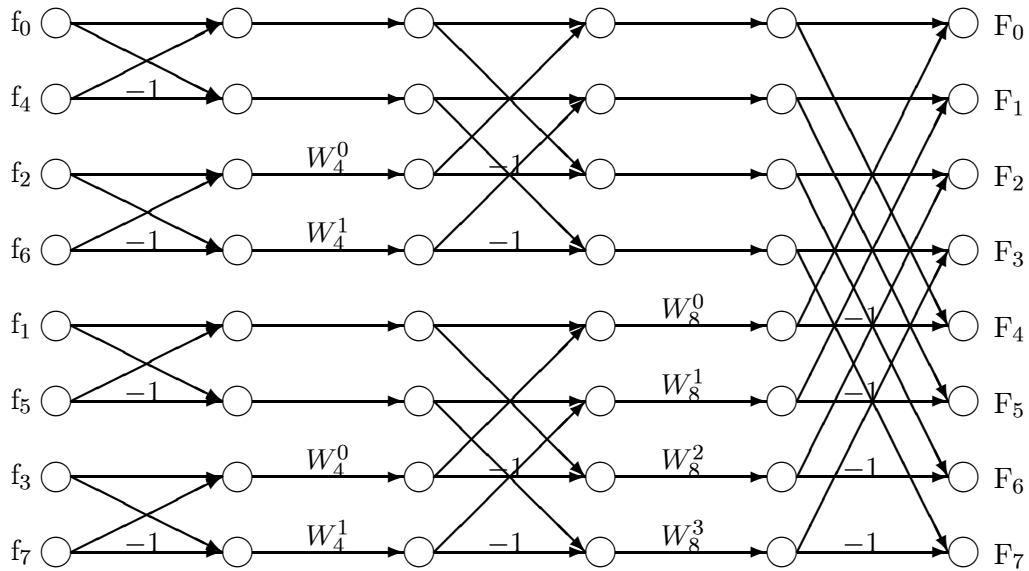
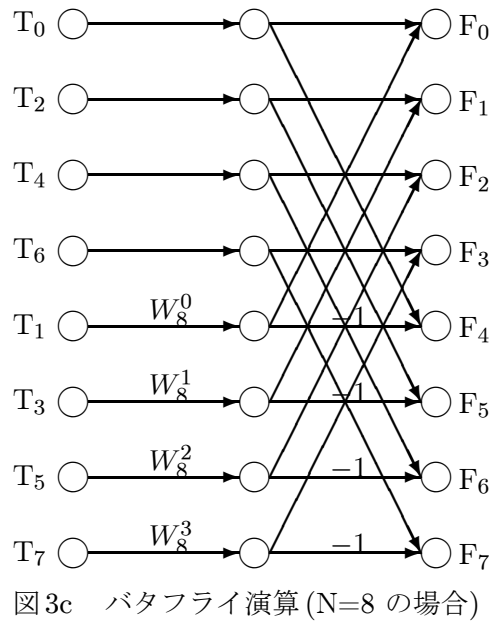
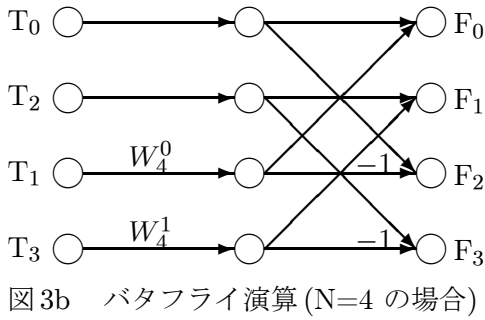
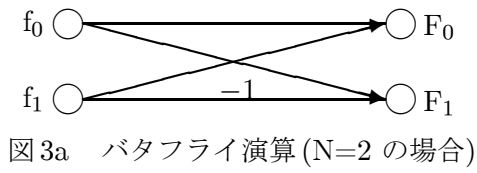


図 2 高速フーリエ変換 (N=8)

をバタフライ演算へと書き換える際に、偶数指標と奇数指標の T にグループ分けをした。これは指標を 2 進数表記した際に、最下位桁が 0 か 1 かで分類していることを意味している。項数が半分になった段階での積の総和を求める演算をバタフライ演算に置き換える際も、同様にして、その段階での 2 進数表記による指標の最下位桁が 0 か 1 かによるグループ分けをする。したがって、積の総和による演算をすべてバタフライ演算に置き換えていくと、 f と F の指標を 2 進数表記し逆順に読んだもの同士が対応することになる。このような順序の関係をビットリバースという。



高速フーリエ変換FFTは、ここで示した様にして、変換長に対応した中間変数を用意し簡単な指標操作を組み込むことにより、比較的容易にプログラム化/ハードウェア化できることが知られている。そしてこのような高速アルゴリズムを用いて離散フーリエ変換を実行すれば、一般的によく見かける変換長 $2^{10} = 1024$ の場合では、積の総和と比較して軽く百倍以上の速度改善が可能となる。このことから、FFTの発見が当時どれほど画期的な事件であったかが分かる。

ところで、ここで示した離散フーリエ変換に対応する逆変換は次のように表すことができる。

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] W_N^{-kn} \quad ; n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

簡単のため上式中の正規化因子 $\frac{1}{N}$ を省略し、先に説明したのと同様にして、 $N = 8$ の場合に

つき、逆フーリエ変換の高速計算手順を図示しておく。重みの値が逆数になっていることを除き高速フーリエ変換と同一であることから、逆変換を変換と全く同様にして実現できることが分かる。

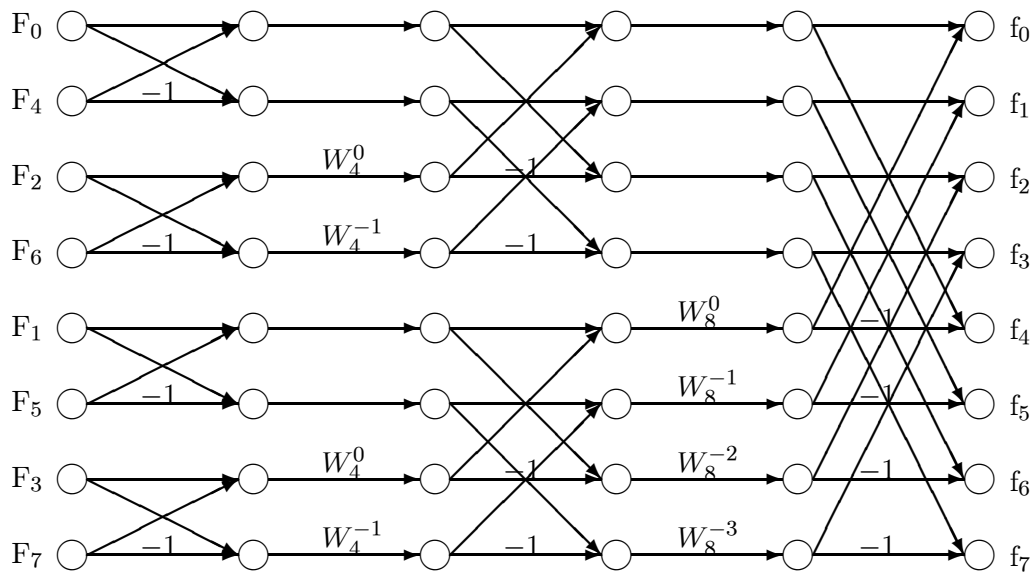


図5 高速逆フーリエ変換 (N=8)

正規化因子を離散フーリエ変換とその逆変換に均等に配分し整理すると、以下に示すような対称性の高い形式で書き表すことができる。

$$F[k] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] W_N^{kn} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$f[n] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] W_N^{-kn} \quad ; n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

これらは、行列とベクトルによる表記を用い、次のように書き直すことができる。

$$F = Af, \quad f = A^*F$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

ただし A^* は行列 A の複素共役転置行列であり $AA^* = A^*A = I$ となる (I は単位行列)。そしてこのような行列 A のことをユニタリ行列と呼ぶ (実数成分の場合には正規直交行列と呼ぶ)。このような、ユニタリ行列または正規直交行列により関係づけられたベクトルに関しては、ベクトルの長さが一致する。そしてこの性質により、信号成分 f および周波数成分 F のどちらを加工しても、エネルギーの意味では同値 ($\|f\| = \|F\|$) となることを注記しておく。

高速算法別バージョン

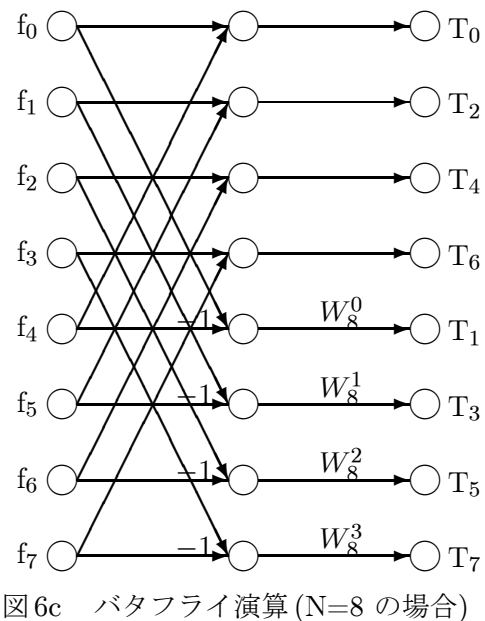
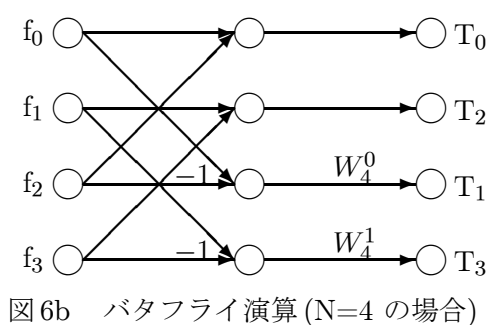
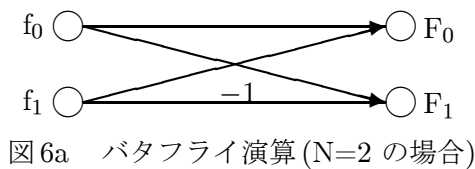
離散フーリエ変換の計算式において、積の総和に関する信号成分の指標に注目した先のアプローチとは別に、周波数成分の指標に注目して整理することによっても高速算法を導出することができる。周波数成分 (F) を偶数次と奇数次に分けて併記すると (周波数間引き), $W_N^{(2k)N/2} = 1$, $W_N^{(2k+1)N/2} = -1$ となることに注意すれば, 変換式を次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
 F[2k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (f[n]W_N^{2kn} + f[N/2+n]W_N^{2k(N/2+n)}) \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (f[n] + f[N/2+n])W_{N/2}^{kn} \\
 F[2k+1] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (f[n]W_N^{(2k+1)n} + f[N/2+n]W_N^{(2k+1)(N/2+n)}) \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^n (f[n] - f[N/2+n])W_{N/2}^{kn}
 \end{aligned}$$

この関係式から, 加減算と重み付けの違いを指標の偶奇性により区別した中間変数を導入すれば, 長さが N の離散フーリエ変換を長さが $N/2$ の離散フーリエ変換に置き換えることができる。

$$\begin{aligned}
 F[2k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} T[2n]W_{N/2}^{kn} \\
 F[2k+1] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} T[2n+1]W_{N/2}^{kn} \\
 \text{ただし } T[2n] &= f[n] + f[N/2+n] \\
 T[2n+1] &= (f[n] - f[N/2+n])W_N^n
 \end{aligned}$$

この計算手順を有向グラフにして表したものを図6に示す ($N = 2, 4, 8$ の場合)。



このようにして離散フーリエ変換の変換長を順次半減させていけば, すべてをバタフライ演算に置き換えることができる。またこの場合の指標もビットリバースの関係にある。図7に, すべ

ての演算をこのようなバタフライ演算に置き換えたものを示す(N = 8の場合)。

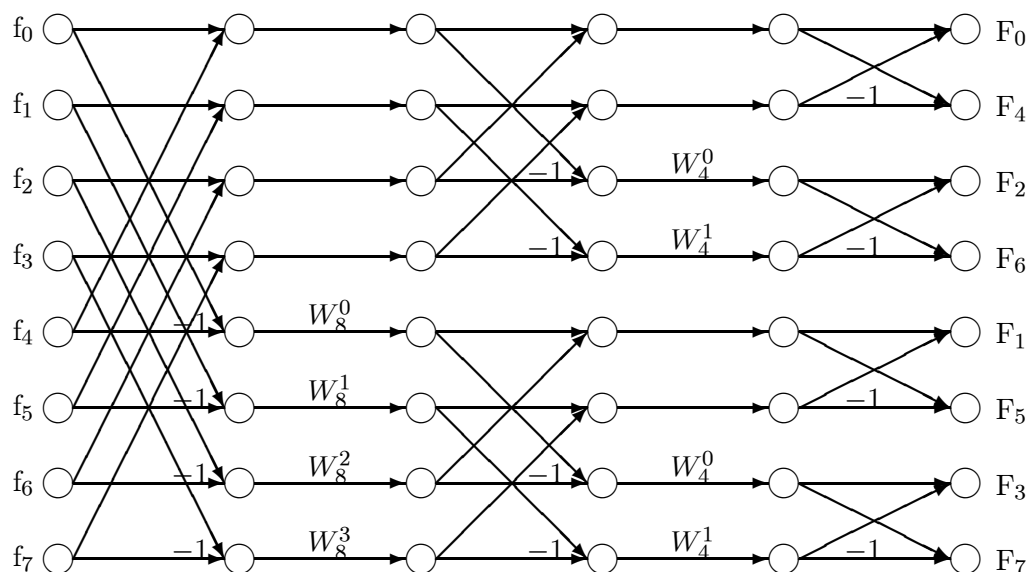


図7 高速フーリエ変換(N=8)

ここで示したようにして、信号の指標または変換係数の指標のどちらに注目するのかというアプローチの違いを反映した、見かけの異なる高速フーリエ変換を導出することができる。そしてこのことから、プログラマの好みを反映して、高速フーリエ変換を実行するプログラムが見かけの異なるものとして作成されているということが理解できる。ところでこれに加えて、境界上に標本点をとるのかそれとも標本化格子間隔の半分だけずれた場所に標本点をとるかによる違いによっても、見かけの異なる離散フーリエ変換すなわち高速フーリエ変換が導出できる。そしてそのようなことを見ていけば、離散コサイン変換の各種バージョンについての差異が明確に理解できるようになってくる。ところで有向グラフは行列とベクトルに対応させることができるので、高速フーリエ変換の構造を行列の積を用いることにより、より詳細に解析することができる。

以上、簡単にではあるが高速フーリエ変換に関する解説を行った。ただし TeX が使えないパソコンでは、フォントの関係で信号線図中の線が上手く表示されない場合がある。なおこの資料は授業用の補助資料として作成したもので、訂正のためとか都合によって変更されることがある。最新のものが、商業目的以外で有れば、以下に示すアドレスにて利用できるようになっている。

<http://cafe.mis.ous.ac.jp/sawami/>